当$a>\frac{1}{e}$时，$f(x)$增区间$\left(0,\frac{1}{e}\right),(a,+\infty)$，减区间$\left(\frac{1}{e},a\right)$

（2）方法一：不等式$(2x-4a)\ln x>-x$恒成立，即$a<\frac{1}{4}\left(2x+\frac{x}{\ln x}\right)$恒成立

设$g(x)=2x+\frac{x}{\ln x}$，$g'(x)=\frac{2(\ln x)^2+\ln x-1}{(\ln x)^2}=\frac{(\ln x+1)(2\ln x-1)}{(\ln x)^2}(x\geq 1)$

令$g'(x)=0$，则$x_1=\frac{1}{e},x_2=\sqrt{e}$

$g(x)$在$(\sqrt{e},+\infty)$单调递增，$[1,\sqrt{e})$单调递减

∴$g(x)$在$x=\sqrt{e}$上取得最小值

∴$g_{min}(x)=g(1)=\sqrt{e}$

∴a的取值范围为$(0,\sqrt{e})$

方法二：不等式$(2x-4a)\ln x>-x$恒成立，在$x\in[1,+\infty)$

即$\frac{f(x)}{x}>0$在$x\in[1,+\infty)$恒成立

∴当$0<a\leq 1$时，$f(x)\geq f(1)>0$恒成立

当$a>1$时，由（1）得$f(x)$在$(1,a)$上单调递减，$(a,+\infty)$上单调递增

∴$f_{min}(x)=f(a)=a^2(1-\ln a^2)>0$

∴$0<a<\sqrt{e}$

∴a的取值范围为$(0,\sqrt{e})$

几何证明

1.如图,ΔABC 中,$AB=5,BC=3,AC=4$,以点 C 为圆心的圆与 AB 相切,则 $\odot C$ 的半径为

$A.$ 2.3
$B.$ 2.4
$C.$ 2.5
$D.$ 2.6

答案：B

难度：★★

解析：由题知 ΔABC 为直角三角形，AB 为切线，由射影定理知 $r=2.4$

2.如图,PC 与圆 O 相切于点 C,直线 PO 交圆 O 于 A,B 两点,弦 CD 垂直 AB 于 E,则下列结论中,错误的是

$A.\Delta BEC \backsim \Delta DEA$

$B.\angle ACE=\angle ACP$

$C.DE^2=OE\cdot EP$

$D.PC^2=PA\cdot AB$

答案：D

难度：★★

解析：A、同弧所对的圆周角相等，得 $\Delta BEC\sim\Delta DEA$；

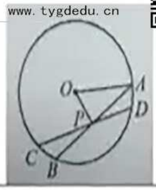
B、弦切角等于弧所对的圆周角：$\angle ACP=\angle B=\angle ADC=\angle ACD$；

C、PC 为圆 O 的切线，$\therefore OC\perp PC,\therefore CE^2=OE\cdot PE$；

D、由切割线定理知：$PC^2=PA\cdot PB$

3.如图，AB,CD 是半径为 a 的圆 O 的两条弦，它们相交于 AB 的中点 P．

若 $PD=\frac{2a}{3}$，$\angle OAP=30^\circ$，则 $CP=$________（用 a 表示）．



答案：$\frac{9}{8}a$

难度：★★★

解析：相交弦定理，垂径定理知：$OP=\frac{1}{2}a$，$AP=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\therefore AP^2=CP\cdot DP \therefore CP=\frac{9}{8}a$

4.如图，点 A,B,C 都在⊙O 上，过点 C 的切线交 AB 的延长线于点 D，

若 $AB=5,BC=3,CD=6$，则线段 AC 的长为______．

答案：$\frac{9}{2}$

难度：★★

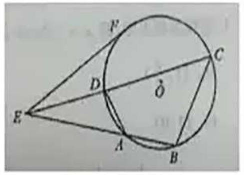
解析：由切割线定理知：$\Delta DBC\sim\Delta DCA\therefore\frac{DC}{DA}=\frac{BC}{CA}=\frac{DB}{DC}$

$\therefore BD=4, \therefore CA=\frac{9}{2}$

5.已知四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，$AD:BC=1:2$，BA,CD 的延长线交于点 E，且 EF 切⊙O 于 F.

(1) 求证：$EB=2ED$；

(2) 若 $AB=2,CD=5$，求 EF 的长.



难度：★★

解析：(1) 由切割线定理知：$\Delta EDA\sim\Delta EBC\therefore\frac{ED}{EB}=\frac{DA}{BC}=\frac{1}{2}\therefore EB=2ED$；

(2) 设 $ED=x,EB=2x,EA=2(x-1),EC=x+5$

由切割线定理：$EA\cdot EB=ED\cdot EC$

$\therefore 2(x-1)\cdot 2x=x(x+5)\therefore x=3$

又 $\because EF^2=EA\cdot EB=24\therefore EF=2\sqrt{6}$

极坐标与参数方程

1.在极坐标系中，圆 $\rho=-2\sin\theta$ 的圆心的极坐标是

A. $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$　B. $\left(1,-\frac{\pi}{2}\right)$　C. $(1,0)$　D. $(1,\pi)$

答案：B

难度：★

解析：$\because\rho=-2\sin\theta\ \therefore\rho^2=-2\rho\sin\theta$ 所以 $x^2+y^2+2y=0,x^2+(y+1)^2=1$，圆心 $(0,-1)$，极坐标为 $\left(1,-\frac{\pi}{2}\right)$

2.若直线$l_1:\begin{cases}x=1-2t,\\y=2+kt,\end{cases}$（$t$为参数）与直线$l_2:\begin{cases}x=s,\\y=1-2s,\end{cases}$（$s$为参数）垂直,则实数$k=$

A.$\frac{1}{2}$　　B.$-\frac{1}{2}$

C.1　　D.-1

答案：D

难度：★

解析：因为$l_1:\begin{cases}x=1-2t,\\y=2+kt,\end{cases}$（$t$为参数）$\therefore k_{l_1}=-\frac{k}{2}$，$l_2=\begin{cases}x=s,\\y=1-2s,\end{cases}$（$s$为参数），$\therefore k_{l_2}=-2$

$\therefore k_{l_1}\times k_{l_2}=\left(-\frac{k}{2}\right)\times(-2)=-1\therefore k=-1$

3.在极坐标系中,点$\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$到圆$\rho=2\cos\theta$的圆心的距离为________.

答案：$\sqrt{3}$

难度：★

解析：因为点$\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$，$\therefore\begin{cases}x=1\\y=\sqrt{3}\end{cases}$，由$\rho=2\cos\theta,\rho^2=2\rho\cos\theta$，即$x^2+y^2=2x,(x-1)^2+y^2=1$,圆心$(1,0)$

$d=\sqrt{(1-1)^2+(\sqrt{3}-0)^2}=\sqrt{3}$

4.在直角坐标系xOy中,以原点O为极点,x轴的正半轴为极轴建立直角坐标系,已知射线$\theta=\frac{\pi}{4}$与曲线

$\begin{cases}x=t,\\y=(t-2)^2,\end{cases}$（$t$ 为参数）相交于 A,B 两点,则线段 AB 的中点的直角坐标为__________.

答案：$\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$

难度：★★

解析：由 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 知普通方程为 $y=x(x>0)$，曲线 $\begin{cases}x=t,\\y=(t-2)^2,\end{cases}$（$t$ 为参数）的普通方程为 $y=(x-2)^2$，联立解得 $A(1,1)$、$B(4,4)$，所以线段 AB 的中点的直角坐标为 $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$。

5.极坐标系与直角坐标系 xOy 有相同的长度单位,以原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴.已知曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$,曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=m+t\cos\alpha,\\y=t\sin\alpha,\end{cases}$（$t$ 为参数,$0\le\alpha<\pi$）,射线 $\theta=\varphi$,$\theta=\varphi+\frac{\pi}{4}$,$\theta=\varphi-\frac{\pi}{4}$ 与曲线 C_1 交于（不包括极点 O）三点 A,B,C.

（1）求证：$|OB|+|OC|=\sqrt{2}|OA|$；

（2）当 $\varphi=\frac{\pi}{12}$,时,B,C 两点在曲线 C_2 上,求 m 的值.

答案：(1)略，(2)$m=2$

难度：★★

解析：(1) 根据题意得 $|OA|=\rho_A=4\cos\varphi$，$|OB|=\rho_B=4\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}(\cos\varphi-\sin\varphi)$，

$|OC|=\rho_C=4\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}(\cos\varphi+\sin\varphi)$，$\therefore |OB|+|OC|=4\sqrt{2}\cos\varphi$，所以 $|OB|+|OC|=\sqrt{2}|OA|$

(2) 由题意得 B.C 的极坐标分别为 $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$，$\left(2\sqrt{3},-\frac{\pi}{6}\right)$，B.C 的直角坐标分别为 $(1,\sqrt{3})$，$(3,-\sqrt{3})$

B.C 的直线方程为 $y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$，由题意知 C_2 过定点 $(m,0)$，代入 $y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$ 得 $m=2$。

不等式

1.不等式 $\frac{2}{x}<-3$ 的解集是

A. $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$　　B. $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)\cup(0,+\infty)$

C. $\left(-\frac{2}{3},0\right)\cup(0,+\infty)$　　D. $\left(-\frac{2}{3},0\right)$

答案:D

难度:★

解析：

$\because \frac{2}{x}<-3$

$\therefore \frac{2}{x}+3<0$，则 $\frac{3x+2}{x}<0$

解得 $x\in\left(-\frac{2}{3},0\right)$

2.不等式$|x+1|-|x-3|\geq 0$的解集是

A.$[1,+\infty)$ B.$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

C.$[-1,3]$ D.$(-\infty,1]$

答案:A

难度：★★

解析：

令$f(x)=|x+1|-|x-3|$

当$x<-1$时，$f(x)=-x-1-(3-x)=-4$

当$-1\leq x\leq 3$时，$f(x)=x+1-(3-x)=2x-2$

当$x>3$时，$f(x)=x+1-(x-3)=4$

画出函数的图像可得$x\in[1,+\infty)$

3.不等式$|3x-1|\geq 2$的解集是________.

答案：$(-\infty,-\frac{1}{3}]\cup[1,+\infty)$

难度：★

解析：

$|3x-1|\geq 2$

$\therefore 3x-1\geq 2$即$x\geq 1$,或$3x-1\leq -2$即$x\leq -\frac{1}{3}$

$\therefore x\in(-\infty,--\frac{1}{3})\cup[1,+\infty)$

4.对于实数 x,y,若 $|x-1|\le 1,|y-2|\le 1$,则 $|x-2y+1|$ 的最大值为__________.

答案：5

难度：★★

解析：

$\because |x-2y+1|=|(x-1)-2(y-1)|$

$\le |x-1|+2|(y-2)+1|$

$\le |x-1|+2|(y-2)|+2$

再由 $|x-1|\le 1,|(y-2)|\le 1$ 可得 $|x-1|+2|(y-2)|+2\le 1+2+2=5$

所以 $|x-2y+1|$ 的最大值为5

5.对于任意的实数 $a(a\ne 0)$ 和 b,不等式 $|a+b|+|a-b|\ge M\cdot|a|$ 恒成立.记实数 M 的最大值是 m.

(1) 求 m 的值;

(2) 解不等式 $|x-1|+|x+2|\le m$.

答案：(1) $m=2$；(2) $\frac{1}{2}\le x\frac{5}{2}$

难度：★★★

解析：(1) 由题：$\because |a+b|+|a-b|\ge M\cdot|a|$恒成立； 即只要左边恒小于或等于右边的最小值

$\because |a+b|-|a-b|\ge|(a+b)+(a-b)|=2|a|$

当且仅当$(a-b)(a+b)\ge 0$时，等号成立；$\therefore M$的最大值为2

(2) 由 (1) 得

当$x\le 1$时，$-(x-1)-(x-2)\le 2$，得$\frac{1}{2}\le x\le 1$

当$1<x<2$时，$x-1-(x-2)\le 2$，得$1<x<2$

当$x\ge 2$时，$x-1+x-2\le 2$，得$2\le x\le\frac{5}{2}$

综上所述：$\frac{1}{2}\le x\le\frac{5}{2}$

不等式解集为：$\left[\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]$