



2017-2018 学年第一学期高三年级阶段性测试

数学试卷

考试时间: 上午 7:30-9:30

一. 选择题 (本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 满分 60 分, 在每出的小题给四个选项中, 只有一项是符合题目要求的, 请将其字母代码填入下表相应位置)

1. 已知集合 $A = \{x | y = \sqrt{-x^2 + 6x - 8}\}$, 集合 $B = \{y | y = \log_2 x, x \in A\}$, 则 $A \cap C_R B =$

- A. [1, 2] B. (1, 2] C. [2, 4] D. (2, 4]

考点: 集合的运算

解析: $\because -x^2 + 6x - 8 \geq 0, \therefore 2 \leq x \leq 4, \therefore A = \{x | 2 \leq x \leq 4\}, B = \{y | 1 \leq y \leq 2\}, \therefore A \cap C_R B = (2, 4]$

答案: D

2 下列选项中, 相等的一组函数是

- A. $y = 1, y = x^0$ B. $y = x + 1, y = \frac{x^2 + x}{x}$ C. $y = \sqrt{x^2}, y = (\sqrt{x})^2$ D. $y = x - 1, y = t - 1$

考点: 函数及其表示

解析: $\because y = 1$ 的定义域为 $R, y = x^0$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 故 A 错; $\because y = x + 1$ 的定义域为 $R, y = \frac{x^2 + x}{x}$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 故 B 错; $\because y = \sqrt{x^2}$ 的定义域为 $R, y = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $\{x | x \geq 0\}$, 故 C 错;

答案: D

3 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前项和为 S_n , 若 $S_5 = 72$, 则 $a_3 =$

- A. 6 B. 8 C. 9 D. 18

考点: 等差数列求和公式, 等差中项的概念

解析: $\because S_5 = \frac{9(a_1 + a_5)}{2} = \frac{9}{2} \times 2a_3 = 9a_3 = 72, \therefore a_3 = 8$

答案: B

4. 函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - 1$ 在 $[0, 2]$ 上的最小值为 ()

- A. $-\frac{8}{3}$ B. $\frac{8}{3}$ C. 1 D. -1

考点: 利用导数求最值

解析: 因为 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 2]$, $f'(x) = x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1, x = -3$.

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为减函数; 当 $1 < x < 2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数.

所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取极小值, 也是最小值. 故 $f(x)_{\min} = f(1) = \frac{1}{3} + 1 - 3 - 1 = -\frac{8}{3}$,

答案: A.



5. 已知函数 $f(x)$ 是偶函数, 且对任意 $x \in R$ 都有 $f(x+3) = -f(x)$, 若当 $x \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ 时, $f(x) = (\frac{1}{2})^x$, 则 $f(31) = (\quad)$

A. $-\frac{1}{4}$

B. 4

C. -4

D. $\frac{1}{4}$

考点: 函数的值. 推导出 $f(x+6) = -f(x+3) = f(x)$, 当 $x \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ 时, $f(x) = (\frac{1}{2})^x$, 从而 $f(31) = f(1) = f(-1) = -f(2)$, 由此能求出结果.

解析: 因为 $f(x)$ 是偶函数, 且对任意 $x \in R$ 都有 $f(x+3) = -f(x)$,

所以 $f(x+6) = -f(x+3) = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是以 6 为周期的函数.

因为当 $x \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ 时, $f(x) = (\frac{1}{2})^x$, 从而 $f(31) = f(5 \times 6 + 1) = f(1)$,

而 $f(1) = f(-1) = -f(-1+3) = -f(2)$, 而 $2 \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$, 所以 $f(2) = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, 所以 $f(31) = -\frac{1}{4}$.

答案: A.

6. 设函数 $f(x) = g(x) + x^2$, 曲线 $y = g(x)$ 在点 $(1, g(1))$ 处的切线方程为 $y = 2x + 1$, 则曲线 $y = f(x)$ 点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 ()

A. $-\frac{1}{4}$

B. 4

C. 2

D. $-\frac{1}{2}$

考点: 利用导数研究曲线上某点切线方程.

解析: 对函数 $f(x) = g(x) + x^2$ 两边求导, 可得 $f'(x) = g'(x) + 2x$,

因为 $y = g(x)$ 在点 $(1, g(1))$ 处的切线方程为 $y = 2x + 1$, 所以 $g'(1) = 2$, 所以 $f'(1) = g'(1) + 2 = 4$.

因此 $y = f(x)$ 点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 4.

答案: B.

7. 中国古代数学著作《算法统综》中有这样一个问题: “三百七十八里关, 初步健步不为难, 次日脚痛减一半, 六朝才得到其关, 要见次日行里数, 请公仔细算相还。” 其大意为: “有一个人走了 378 里路, 第一天健步行走, 从第二天起因脚痛每天走的路程为前一天的一半, 走了 6 天后到达目的地。” 问此人第 5 天走了 ()

A. 48 里

B. 24 里

C. 12 里

D. 6 里

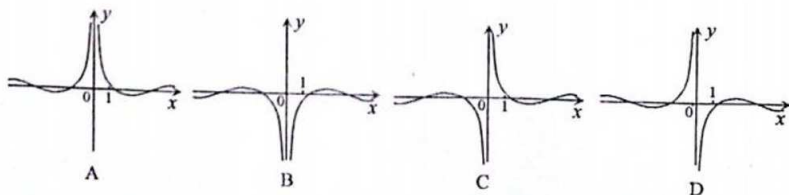
考点: 等比数列

解析: 由题意知, 每天走的里数构成以 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列. 由 $S_6 = 378$ 求得首项 a_1 , 进而求得 a_5 .

答案: C



8. 函数 $f(x) = (-\frac{1}{x})\cos x$ 的图像的一部分可能是()



考点: 函数的图像与性质

解析: 由函数的解析式得, $f(x)$ 为奇函数, 排除 A、B; $f(1) < 0$, 排除 C。

答案: D

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (2a-1)x+3a, & x < 2 \\ \log_a(x-1), & x \geq 2 \end{cases}$ 对任意的实数 $x_1 \neq x_2$ 都有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$, 则实数 a 的取值范围是()

A. $(0, 1)$

B. $(0, \frac{1}{2})$

C. $(\frac{2}{7}, \frac{1}{2})$

D. $(\frac{2}{7}, 1)$

考点: 分段函数的单调性

解析: 根据条件得, $f(x)$ 为减函数, 各段单调+整体单调, 即 $\begin{cases} 2a-1 < 0 \\ 0 < a < 1 \\ 7a-2 \geq 0 \end{cases}$

答案: C

10. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, 若 $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$, 则 a_{16} 等于()

A. 224

B. 225

C. 226

D. 227

考点: 数列递推公式求通项

解析: $\because a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2, \therefore a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 2, \{a_{n+1} - a_n\}$ 是以 $a_2 - a_1 = 1$ 为首项, 以 2 为公差的等差数列, 则有

$$a_{n+1} - a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1,$$

$$a_{16} - a_{15} = 2 \times 15 - 1$$

$$a_{15} - a_{14} = 2 \times 14 - 1, \therefore a_{16} = 2 \times \frac{15 \times (1+15)}{2} - 15 + 1 = 226$$

...

$$a_2 - a_1 = 2 \times 1 - 1$$

答案: C

11. 设函数 $f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的可导函数, 对任意的实数 x , 有 $f(x) = 2018x^2 - f(-x)$ 且 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) - 2018x > 0$, 则关于实数 m 的不等式 $f(m+1) - f(-m) \geq 2018m + 1009$ 的解集为()

A. $[3, +\infty)$

B. $[\frac{1}{2}, +\infty)$

C. $[1, 2]$

D. $[-\frac{1}{2}, +\infty)$



工大教育

——做最感动客户的专业教育组织

查考试成绩、答案 | 查备课笔记
下载学习资料 | 及时获取最新教育信息

太原工大教育 官方微信: tygdedu
官方网址: www.tygdedu.cn



考点: 利用导函数形式构造原函数

解析: $\because f'(x) - 2018x > 0, \therefore$ 可以构造 $F(x) = f(x) - 2008 \times \frac{x^2}{2} = f(x) - 1009x^2$, 且 $F(x)$ 是增函数, 则 $f(x) = 2018x^2 - f(-x)$ 可以整理

为 $F(x) + 1009x^2 = 2018x^2 - (F(-x) + 1009(-x)^2)$, 即 $F(x) = -F(-x)$, $F(x)$ 是奇函数, 故不等式可以等价变形成

$(F(m+1) + 1009(m+1)^2) - (F(-m) + 1009(-m)^2) \geq 2018m + 1009$, 可以整理为 $F(m+1) \geq F(m)$, \therefore 根据单调递增可得:

$$2m \geq -1, \therefore m \geq -\frac{1}{2}$$

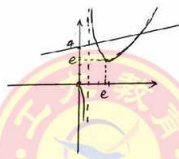
答案: D

12. 函数 $f(x) = (kx+4)\ln x - x (x>1)$, 若 $f(x)>0$ 的解集是 (s, t) , 且 (s, t) 中只有一个整数, 则实数 k 的取值范围是 ()

A. $(\frac{1}{\ln 2} - 2, \frac{1}{\ln 3} - \frac{4}{3})$ B. $(\frac{1}{\ln 2} - 2, \frac{1}{\ln 3} - \frac{4}{3}]$ C. $(\frac{1}{\ln 3} - \frac{4}{3}, \frac{1}{2\ln 2} - 1]$ D. $(\frac{1}{\ln 3} - \frac{4}{3}, \frac{1}{2\ln 2} - 1)$

考点: 数形结合, 求参数范围

解析:



如图:

$(kx+4)\ln x > x, \therefore x > 1, \therefore kx+4 > \frac{x}{\ln x}, \frac{x}{\ln x}$ 的极小值在 $x=e$ 处取得, 根据图像, 解集 (s, t) 中只有一个整数, 则这个整数只可能是 2

或者 3, 如果是 2, 则有 $\begin{cases} 2k+4 > \frac{2}{\ln 2} \\ 3k+4 \leq \frac{3}{\ln 3} \end{cases}$, 解得 $k \in (\frac{1}{\ln 2} - 2, \frac{1}{\ln 3} - \frac{4}{3}]$; 如果是 3, 则有 $\begin{cases} 2k+4 \leq \frac{2}{\ln 2} \\ 3k+4 > \frac{3}{\ln 3} \end{cases}$, 解得 $k \in (\frac{1}{\ln 3} - \frac{4}{3}, \frac{1}{2\ln 2} - 2]$, 而

$\ln 2 = 0.693, \ln 3 = 1.099$, 可估算 $(\frac{1}{\ln 3} - \frac{4}{3}) - (\frac{1}{\ln 2} - 2) = \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 2} + \frac{2}{3} = 0.91 - 1.44 + 0.67 = 0.14 > 0$, 故 3 不合理, 应该是 2.

答案: B

二. 填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 满分 20 分, 把答案填在题中横线上)

13. 设命题 $p: \exists x_0 \in R, x_0^2 > x_0$, 则命题 $\neg p$: _____

考点: 含有特称量词的否定

解析: $\neg p: \forall x \in R, x^2 \leq x$

答案: $\neg p: \forall x \in R, x^2 \leq x$

14. 已知集合 $A = \{x | x^2 - (a+2)x + 2a \geq 0\}, B = \{x | b < x < c\}$, 若 $A \cup B = R, A \cap B = (-1, 1]$, 则 $a+b+c =$ _____

考点: 集合运算求参数

解析: 由 $A = \{x | x^2 - (a+2)x + 2a \geq 0\}$ 得 $A = \{x | (x-2)(x-a) \geq 0\}$ 又 $A \cap B = (-1, 1]$, 所以 $a=1$

又 $\because A \cup B = R, \therefore b = -1, c = 2, a+b+c = 2$

答案: 2



15. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, $a_1 = 2, a_4 = \frac{1}{2}$ 则 $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_{n+1} =$ _____.

考点: 等比数列通项以及前 n 项和.

解析: $\{a_n\}$ 是等比数列, $a_1 = 2, a_4 = \frac{1}{2}$, 得 $q = \frac{1}{2}$ 所以 $a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-3}}$,

则 $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_{n+1} = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + \dots + \frac{1}{2^{n-3}} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} = 8 + 2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{2n-5}}$, 所以, $\{a_n a_{n+1}\}$ 形成了以 8 为首项, $\frac{1}{4}$ 为公比的等比数

列, 故 $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_{n+1} = \frac{8 \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right]}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{32}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right)$

答案: $\frac{32}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right)$

16. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ \log_a |x - 1| + 1, & x \neq 1, \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 若函数 $g(x) = [f(x)]^2 + bf(x) + c$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3 , 则

$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 =$ _____.

考点: 复合函数零点问题.

解析: 设 $f(x) = k$, 则函数 $g(x) = k^2 + bk + c$ 有两个零点, 故必然有 $f(x) = k$ 有三个根, 根据图像的对称性, $\log_a |x - 1| + 1 = k$ 有解时总会有两个根, 则这三个根里必然有 $1 = k = x_1$, 则 $\log_a |x - 1| + 1 = k = 1$, 得 $x_2 = 0, x_3 = 2$, 故 $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 2$

答案: 2;

二. 解答题 (本大题共 4 小题, 共 40 分, 解答需要写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题 10 分)

设 $U = \mathbb{R}, A = \{x | 2x^2 - 5x + 2 \leq 0\}, B = \{x | x^2 + m < 0\}$.

(I) 当 $m = -4$ 时, 求 $A \cup B, C_U A$;

(II) 若 $(C_U A) \cap B = B$, 求实数 m 的取值范围.

考点: 一元二次不等式、集合的运算

解析: (I) $\because 2x^2 - 5x + 2 \leq 0, \therefore (2x - 1)(x - 2) \leq 0, \therefore \frac{1}{2} \leq x \leq 2$, 即 $A = \{x | \frac{1}{2} \leq x \leq 2\}$.

当 $m = -4$ 时, $x^2 - 4 < 0, \therefore (x + 2)(x - 2) < 0, \therefore -2 < x < 2$, 即 $B = \{x | -2 < x < 2\}$.

$\therefore A \cup B = \{x | -2 < x \leq 2\}, C_U A = \{x | x < \frac{1}{2} \text{ 或 } x > 2\}$.

(II) 由 $(C_U A) \cap B = B$ 可得: $B \subset C_U A$, 则当 $B = \emptyset$, 即 $m \geq 0$ 时, 显然成立;

当 $B \neq \emptyset$ 即 $m < 0$ 时, $B = \{x | -\sqrt{-m} < x < \sqrt{-m}\}$, 满足 $\sqrt{-m} \leq \frac{1}{2}$, 则可得 $-\frac{1}{4} \leq m < 0$.

综上: m 的取值范围是 $m \geq -\frac{1}{4}$.



18. (本小题满分 10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = n^2 + n$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若 $\{b_n\}$ 为等比数列, 且 $b_1 = a_4, b_2 = a_6$, 求数列 $\{\frac{n}{b_n}\}$ 的前 n 项和 T_n .

考点: 数列通项与前 n 项和之间的关系, 等比数列的定义及错位相减法求和的应用.

解析:

(I) 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 2$

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + n - (n-1)^2 - (n-1) = 2n$,

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n$;

(II) $b_1 = a_4 = 8, b_2 = a_6 = 12$, 已知 $\{b_n\}$ 为等比数列, 则根据定义得公比 $q = \frac{3}{2}$,

则 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 8 \times (\frac{3}{2})^{n-1}$

$$\begin{aligned} \therefore T_n &= \frac{1}{8 \times (\frac{3}{2})^0} + \frac{2}{8 \times (\frac{3}{2})^1} + \frac{3}{8 \times (\frac{3}{2})^2} + \dots + \frac{n}{8 \times (\frac{3}{2})^{n-1}} \\ \frac{2}{3} T_n &= \frac{1}{8 \times (\frac{3}{2})^1} + \frac{2}{8 \times (\frac{3}{2})^2} + \frac{3}{8 \times (\frac{3}{2})^3} + \dots + \frac{n}{8 \times (\frac{3}{2})^n} \\ \frac{1}{3} T_n &= \frac{1}{8 \times (\frac{3}{2})^0} + \frac{1}{8 \times (\frac{3}{2})^1} + \frac{1}{8 \times (\frac{3}{2})^2} + \dots + \frac{1}{8 \times (\frac{3}{2})^{n-1}} - \frac{n}{8 \times (\frac{3}{2})^n} \\ &= \frac{\frac{1}{8}(1 - (\frac{2}{3})^n)}{1 - \frac{2}{3}} - \frac{n}{8 \times (\frac{3}{2})^n} \\ &= \frac{\frac{3}{8}(1 - (\frac{2}{3})^n)}{1 - \frac{2}{3}} - \frac{n}{8 \times (\frac{3}{2})^n} \\ &= \frac{9}{8} - \frac{9 + 3n}{8 \times (\frac{3}{2})^n} = \frac{9}{8} - \frac{(3+n) \times 2^{n-3}}{3^{n-1}} \end{aligned}$$

工大教育

——做最感动客户的专业教育组织

19. (本小题满分 10 分)

某工厂生产某种产品, 每日的销售额 $f(x)$ (单位: 万元) 与日产量 x (单位: 吨) 满足函数关系式 $f(x) = \begin{cases} 3x + \frac{18}{x-8} + 5, & 0 < x < 6 \\ 14, & x \geq 6 \end{cases}$. 每

日的成本 $g(x)$ (单位: 万元) 与日产量 x 满足下图所示的函数关系, 已知每日的利润 $Q(x) = f(x) - g(x)$.

(1) 求 $Q(x)$ 的解析式;

(2) 当日产量为多少吨时, 每日的利润达到最大, 并求出最大值.

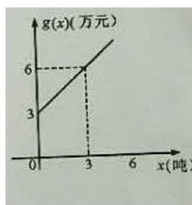
考点: 函数模型的应用与最值问题

解析:

(1) 由题设 $g(x) = kx + b$, 图像经过点 $(0, 3), (3, 6)$

$$\therefore \begin{cases} b = 3 \\ 3k + b = 6 \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} b = 3 \\ k = 1 \end{cases}$$

$$\therefore g(x) = 3x + 3$$





将 $g(x)$ 代入 $f(x)$ 中得

$$Q(x) = \begin{cases} 2x + \frac{18}{x-8} + 2, & 0 < x < 6 \\ 11-x, & x \geq 6 \end{cases}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, 当 } 0 < x < 6 \text{ 时, } Q(x) = 2x + \frac{18}{x-8} + 2 = 2(x-8) + \frac{18}{x-8} + 18$$

$$\because 0 < x < 6, \therefore x-8 \in (-8, -2), \text{ 所以 } Q(x) = -\left[2(8-x) + \frac{18}{8-x}\right] + 18 \leq -2\sqrt{2(8-x) \cdot \frac{18}{8-x}} + 18 = 6$$

当且仅当 $2(8-x) = \frac{18}{8-x}$, 即 $x = 5$ 取等号;

当 $x \geq 6$ 时, $Q(x) = 11-x$, 所以当 $x = 6$ 时有最大值为 5.

故当生产量为 5 吨时, 利润最大为 6.

20 (本小题满分 10 分) 已知 $f(x) = \ln x - ax + \frac{1-a}{x} (a \in \mathbb{R})$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 是否存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得函数 $f(x)$ 存在三个零点? 若存在, 请求解 a 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

考点: 导数含参讨论单调性; 利用单调性讨论零点问题.

解析: (1) $f'(x) = \frac{1}{x} - a - \frac{1-a}{x^2} = -a \cdot \frac{(x-1)\left[x - \left(\frac{1}{1-a}\right)\right]}{x^2}$.

1) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 单增区间为 $(1, +\infty)$, 单减区间为 $(0, 1)$.

2) 当 $a \geq 1$ 时, $f(x)$ 单增区间为 $(0, 1)$, 单减区间为 $(1, +\infty)$.

3) 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 单增区间为 $\left(1, \frac{1}{1-a}\right)$, 单减区间为 $(0, 1), \left(\frac{1}{1-a}, +\infty\right)$.

4) 当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, $f(x)$ 单增区间为 $\left(1, \frac{1}{a}\right)$, 单减区间为 $\left(0, \frac{1}{a}\right), (1, +\infty)$.

5) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 单减区间为 $(0, +\infty)$.

(2) $f(1) = 1 - 2a$. 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)_{\min} = f(1) > 0$, 不存在零点;

当 $a \geq 1$ 时, $f(x)_{\min} = f(1) < 0$, 不存在零点;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 单调递减, 不可能有三个零点;

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $f(1) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上无零点,

因为 $f(x)$ 在 $\left(1, \frac{1}{1-a}\right)$ 单增, 所以 $f(x)$ 在 $\left(1, \frac{1}{1-a}\right)$ 上无零点, 因为 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{1-a}, +\infty\right)$ 单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 不可能有三个零点;



工大教育

——做最感动客户的专业教育组织

查考试成绩、答案 | 查备课笔记
下载学习资料 | 及时获取最新教育信息

太原工大教育 官方微信: tygdedu
官方网址: www.tygdedu.cn



当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, $f(1) < 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上无零点, 因为 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a}-1)$ 上单减, $(\frac{1}{a}-1, 1)$ 上单增, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不可能有三个零点。

综上所述, 不存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x)$ 有三个零点。

选修 4-4 极坐标与参数方程

一、选择题 (本大题共 2 小题, 每小题 5 分, 满分 10 分, 在每出的小题给四个选项中, 只有一项是符合题目要求的, 请将其字母代码填入下表相应位置)

1. 极坐标方程 $\rho \cos \theta = 2 \sin 2\theta$ 表示的曲线为

- A. 一条射线和一个圆 B. 两条直线 C. 一条直线和一个圆 D. 一个圆

考点: 极坐标方程的化解

解析: 由 $\rho \cos \theta = 2 \sin 2\theta$ 可得, $\rho \cos \theta = 4 \sin \theta \cos \theta$, 当 $\cos \theta \neq 0$ 时, $\rho = 4 \sin \theta$ 此时表示一个圆; 当 $\cos \theta = 0$ 时 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 或 $\theta = \frac{3}{2}\pi$, 表示一条直线

答案: C

2. 圆 $\rho = 5 \cos \theta - 5\sqrt{3} \sin \theta$ 的圆心坐标是

- A. $(-5, -\frac{2}{3}\pi)$ B. $(5, \frac{5}{3}\pi)$ C. $(5, -\frac{2}{3}\pi)$ D. $(-5, \frac{5}{3}\pi)$

考点: 考察极坐标和直角坐标的化简

解析: 由 $\rho = 5 \cos \theta - 5\sqrt{3} \sin \theta$, 可得 $x^2 + y^2 = 5x - 5\sqrt{3}y \Rightarrow (x - \frac{5}{2})^2 + (y + \frac{5\sqrt{3}}{2})^2 = 25$

所以圆的圆心坐标为 $(\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2})$, 故 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{75}{4}} = 5$, $\tan \theta = \frac{y}{x} = -\sqrt{3}$, 因为 θ 为第四象限, 所以 $\theta = \frac{5\pi}{3}$,

答案: B

二、填空题 (本大题共 2 小题, 每小题 5 分, 满分 10 分)

3. 直线 $\begin{cases} x = 2 - \frac{1}{2}t \\ y = -1 + \frac{1}{2}t \end{cases}$ (t 为参数) 被圆 $x^2 + y^2 = 4$ 截得弦长为

考点: 考察参数方程的化简与计算问题

解析: 将直线方程代入 $x^2 + y^2 = 4$ 得, $(2 - \frac{1}{2}t)^2 + (\frac{1}{2}t - 1)^2 - 4 = 0$, 化简得 $t^2 - 6t + 2 = 0$

$\therefore \begin{cases} t_1 + t_2 = 6 \\ t_1 t_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow |AB| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = \sqrt{36 - 8} = 2\sqrt{7}$

答案: $2\sqrt{7}$

4. 与参数方程 $\begin{cases} x = \sin \theta + \cos \theta \\ y = 1 + \sin 2\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 等价的普通方程为

考点: 参数方程化为普通方程



解析: 将 $\begin{cases} x = \sin \theta + \cos \theta \\ y = 1 + \sin 2\theta \end{cases}$ 化简为 $\begin{cases} x^2 = 1 + \sin 2\theta \\ y = 1 + \sin 2\theta \end{cases}$, 故可以得到普通方程为 $x^2 = y$

答案: $x^2 = y$

三. 解答题 (本大题共 1 题, 满分 10 分, 解答题需写出文字说明、证明过程或演算步骤)

5. (本小题满分 10 分)

已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 1$, 以极点为原点, 极轴为 x 正半轴建立平面直角坐标系, 直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{t}{2} \\ y = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

(I) 写出 l 与曲线 C 的普通方程;

(II) 设曲线 C 经过伸缩变换 $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases}$ 得到曲线 C' , 设曲线 C' 上任一点为 $M(m, n)$, 求 $m + 2\sqrt{3}n$ 的最小值

考点: 1. 伸缩变换; 2. 简单曲线的极坐标方程; 3. 点的极坐标和直角坐标的互化; 4. 参数方程化成普通方程

解析: (I) 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \frac{t}{2} \\ y = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$

由上式化简成 $t = 2(x-1)$ 代入下式得 $l: \sqrt{3}x - y + 2 - \sqrt{3} = 0$,

根据 $\rho^2 = x^2 + y^2$, 进行化简得 $C: x^2 + y^2 = 1$

(II) $Q \begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases} \therefore \begin{cases} x = \frac{x'}{2} \\ y = y' \end{cases}$ 代入 C 得 $\therefore C': \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

设椭圆的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数})$

则 $x + 2\sqrt{3}y = 2\cos \theta + 2\sqrt{3}\sin \theta = 4\sin(\theta + \frac{\pi}{6})$

则 $x + 2\sqrt{3}y$ 的最小值为 -4

选修 4-5 不等式选讲

一、选择题 (本大题共 2 小题, 每小题 5 分, 满分 10 分, 在每出的小题给四个选项中, 只有一项是符合题目要求的, 请将其字母代码填入下表相应位置)

1. 不等式 $1 < |x+1| < 3$ 的解集为

A. (0, 2)

B. $(-2, 0) \cup (2, 4)$

C. $(-4, 0)$

D. $(-4, -2) \cup (0, 2)$

考点: 绝对值不等式的解法

解析: $1 < |x+1| < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| > 1 \\ |x+1| < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \text{ 或 } x < -2 \\ -4 < x < 2 \end{cases}$, 综上原不等式的解集为: $(-4, -2) \cup (0, 2)$



工大教育

——做最感动客户的专业教育组织

查考试成绩、答案 | 查备课笔记
下载学习资料 | 及时获取最新教育信息

太原工大教育 官方微信: tygdedu
官方网址: www.tygdedu.cn



答案: D,

2. 不等式 $|x-4|+|x-3|<a$ 有解的充要条件是

A. $a>7$

B. $a>1$

C. $a<1$

D. $a\geq 1$

考点: 绝对值不等式的解法

解析: $|x-4|+|x-3|<a$ 有解等价于 $a>(|x-4|+|x-3|)_{\min}$,

由绝对值的几何意义知 $|x-4|+|x-3|$ 表示 x 到 4, 3 的距离的和, 所以最小值为 1

答案: B,

二、填空题 (本大题共 2 小题, 每小题 5 分, 满分 10 分)

3. 不等式 $|x-1|-|x-5|<2$ 的解集为_____.

考点: 绝对值不等式的解法

解析: 当 $x<1$ 时, 原不等式等价于 $-4<2$, 成立

当 $1\leq x\leq 5$ 时, 原不等式等价于 $x<4$

当 $x>5$ 时, 原不等式等价于 $4<2$ 矛盾, 综上: $x<4$

答案: $\{x|x<4\}$

4. 对于实数 x, y , 若 $|x-1|\leq 1, |y-2|\leq 1$, 则 $|x-2y+1|$ 的最大值为_____.

考点: 绝对值不等式的解法

解析: $|x-2y+1|=|(x-1)-2(y-2)+1|\leq |x-1|+2|(y-2)+1|\leq |x-1|+2|y-2|+2$, 又因为 $|x-1|\leq 1, |y-2|\leq 1$,

所以 $|x-2y+1|\leq |x-1|+2|y-2|+2\leq 1+2+2=5$, 故最大值为 5

答案: 5

三、解答题 (本大题共 1 题, 满分 10 分, 解答题需写出文字说明、证明过程或演算步骤)

5. (本小题满分 10 分)

设函数 $f(x)=|x-1|+|x-a|$ (本小题满分 10 分)

(1) 若 $a=-1$, 解不等式 $f(x)\geq 3$;

(2) 如果对于 $\forall x\in R$, 恒有 $f(x)>2x+1$, 求实数 a 的取值范围.

考点: 解不等式, 求参数取值范围

解析: (1) 当 $a=-1$ 时, $f(x)=|x-1|+|x+1|$,

当 $x<-1$ 时, $f(x)=1-x-x-1\geq 3\Rightarrow x\leq -\frac{3}{2}$; 当 $-1\leq x<1$ 时, $f(x)=1-x+x+1\geq 3$, 无解; 当 $x\geq 1$ 时, $f(x)=x-1+x+1\geq 3\Rightarrow x\geq \frac{3}{2}$

综上所述, 不等式 $f(x)\geq 3$ 的解集为 $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

(2) 当 $a\geq 1$ 时, $a<x$ 时, $f(x)=x-1+x-a=2x-a-1>2x+1\Rightarrow a<-2$ 无解



工大教育

——做最感动客户的专业教育组织

查考试成绩、答案 | 查备课笔记
下载学习资料 | 及时获取最新教育信息

太原工大教育 官方微信号: tygdedu

官方网址: www.tygdedu.cn



此时不符合题意。

当 $a < 1$ 时, $a < x < 1$ 时, $f(x) = 1 - x + x - a = 1 - a > 2x + 1 \Rightarrow a < -2x \Rightarrow a < -2$ 满足题意

$x \geq 1$ 时, $f(x) = x - 1 + x - a = 2x - 1 - a > 2x + 1 \Rightarrow a < -2$ 满足题意

$x \leq a$ 时, $f(x) = 1 - x + a - x = 1 + a - 2x > 2x + 1 \Rightarrow a > 4x \Rightarrow a < 0$

综上所述, $a \in (-\infty, -2)$



工大教育

——做最感动客户的专业教育组织