太原市2017年高三年级模拟试题(二)

数学(文)参考答案及评分标准

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分)

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选 项	B	C	A	D	B	D	A	B	C	A	D	D

二、填空题(本大题共4小题,每小题5分,共20分)

13. $(2,+\infty)$　14. $-\frac{24}{25}$　15. $\frac{\sqrt{3}}{12}$　16. $\frac{60\pi}{11}$

三、解答题(本大题共70分)

17.(本小题满分12分)

解(Ⅰ)当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=1$, ………………………… 1分

当 $n\geqslant 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=n$, ………………………… 3分

$\therefore a_n=n\ (n\in \mathbf{N}^*)$, ………………………… 4分

$\therefore b_n=a_n+a_{n+1}=2n+1$; ………………………… 6分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $a_n=n$, $b_n=2n+1$,

$\therefore c_n=2^{a_n}\cdot(b_n-1)=n\times 2^{n+1}$, ………………………… 8分

$\therefore T_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+n\times2^{n+1}$, ①

①×2 得 $2T_n=1\times2^3+2\times2^4+3\times2^5+\cdots+n\times2^{n+2}$, ② ………… 10分

①－② 得 $-T_n=2^2+2^3+\cdots+2^{n+1}-n\times2^{n+2}=(1-n)\times2^{n+2}-4$,

$\therefore T_n=(n-1)\times2^{n+2}+4$. ………………………… 12分

18.(本小题满分12分)

解(Ⅰ)记甲袋中红球是 r,白球分别 w_1,w_2,

由题意得顾客 A 可从甲袋中先后摸出两个球,其所有等可能出现的结果为: (r,r), (r,w_1), (r,w_2), (w_1,r), (w_1,w_1), (w_1,w_2), (w_2,r), (w_2,w_1), (w_2,w_2),共有9种, …… 2分

其中结果 (r,w_1), (r,w_2), (w_1,r), (w_2,r) 可获奖15元,所以顾客 A 所获奖金为15元的概率为 $\frac{4}{9}$; ………………………… 4分

(Ⅱ)由题意得顾客 A 可以根据方案 a 抽奖两次或根据方案 a,b 各抽奖一次, ………… 5分

由(Ⅰ)知顾客 A 根据方案 a 抽奖两次所获奖金及其概率如下表1:

所获奖金(单位:元)	0	15	30
概率	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

………………………… 7分

记乙袋中红球分别是 R_1, R_2，白球是 W，

则顾客 A 根据方案 a, b 各抽奖一次的所有等可能出现的结果为 (r, R_1)，(r, R_2)，(r, W)，(w_1, R_1)，(w_1, R_2)，(w_1, W)，(w_2, R_1)，(w_2, R_2)，(w_2, W)，共有 9 种，

其中结果 (r, R_1)，(r, R_2) 可获奖 25 元，结果 (r, W) 可获奖 15 元，(w_1, R_1)，(w_1, R_2)，(w_2, R_1)，(w_2, R_2) 可获奖 10 元，其余可获奖金 0 元，且它们出现的概率均为 $\frac{1}{9}$，

所以顾客 A 根据方案 a, b 各抽奖一次所获奖金及其概率如表 2：

所获奖金(单位:元)	0	10	15	25
概率	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

…………………………… 10 分

由表 1，表 2 可知顾客 A 最有可能获得的奖金数为 15 元. …………………………… 12 分

19.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）证法一：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，点 M, N 分别是 AD, BC 的中点，

$\therefore AM \parallel BN, AM = BN, \angle DAB = 90^\circ$，$\therefore$ 四边形 $ABNM$ 是矩形，$\therefore AD \perp MN$，

$\because AE = DE$，点 M 是 AD 的中点，$\therefore AD \perp ME$，$\therefore AD \perp$ 平面 EMN. …… 3 分

同理可得 $BC \perp$ 平面 FMN，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore AD \parallel BC$，$\therefore AD \perp$ 平面 FMN，……………………… 4 分

$\therefore$ 平面 EMN 与平面 FMN 是同一平面，E, F, M, N 四点共面；……………………… 6 分

证法二：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，点 M, N 分别是 AD, BC 的中点，

$\therefore AM \parallel BN$，$AM = BN, \angle DAB = 90^\circ$，$\therefore$ 四边形 $ABNM$ 是矩形，$\therefore AD \perp MN$，

$\because AE = DE$，点 M 是 AD 的中点，$\therefore AD \perp ME$，$\therefore AD \perp$ 平面 EMN，……… 3 分

$\therefore$ 平面 $EMN \perp$ 平面 $ABCD$，…………………………………………………………… 4 分

同理可得平面 $FMN \perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore$ 平面 EMN 与平面 FMN 是同一平面，E, F, M, N 四点共面；……………………… 6 分

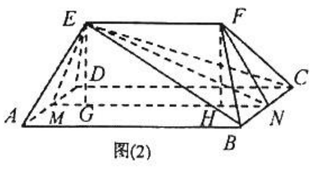
（Ⅱ）连接 EN，由（Ⅰ）得 $BC \perp$ 平面 $EFNM$，$\therefore$ 平面 $ABCD \perp$ 平面 $EMNF$，

分别过点 E, F 作 $EG \perp MN, FH \perp MN$，垂足分别为 G, H，$\therefore EG \parallel FH$，

$\because$ 二面角 $F - BC - A$ 是 60°，$\therefore \angle MNF = 60^\circ$，

$\because BC = 2, BF = CF = \sqrt{2}$，点 N 是 BC 的中点，

$\therefore FN = 1$，$HN = \frac{1}{2}$，$FH = \frac{\sqrt{3}}{2}$，……………… 8 分



图(2)

同理可得 $MG = \frac{1}{2}, EG = \frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore EG = FH$，$\therefore EFHG$ 是矩形，

$\therefore EF = MN - MG - HN = 3$，…………………………………………………… 9 分

$\therefore V_{E-BCF} = 2V_{E-BFN} = 2V_{B-FEN} = \frac{2}{3}S_{\triangle EFN} \cdot BN = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}EF \cdot FH \cdot BN = \frac{\sqrt{3}}{2}$ …12 分

20.(本小题满分12分)

解(Ⅰ)令 $x=0$,由 $(x-2)^2+y^2=5(x\geqslant 0)$ 得 $y=\pm 1$,

$\therefore A(0,1),B(0,-1),\therefore b=1$, …………………………………………… 1分

由题意可知当 P、Q 均在 x 轴上时, $|PQ|$ 取得最大值,

$\therefore a+2+\sqrt{5}=4+\sqrt{5}$, $\therefore a=2$, …………………………………………… 2分

$\therefore$ 半椭圆 M 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1(x\leqslant 0)$; …………………………………… 4分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $A(0,1),B(0,-1)$,设直线 PQ 的方程为 $y=kx+1$,

设 $P(x_1,y_1)$,由 $\begin{cases} y=kx+1, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $(1+a^2k^2)x^2+2a^2kx=0$, $\therefore x_1=-\dfrac{2a^2k}{1+a^2k^2}$,

设 $Q(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases} y=kx+1, \\ (x-2)^2+y^2=5 \end{cases}$ 得 $(1+k^2)x^2+2(k-2)x=0$, $\therefore x_2=\dfrac{4-2k}{1+k^2}$, …6分

$\because \overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AP}=0$, $\therefore x_1=-x_2$,

$\because \overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{BQ}$, $\therefore \overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$, $\therefore (1+k^2)x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4=0$, ……… 8分

$\therefore (1+k^2)x_2^2-4=0$, 将 $x_2=\dfrac{4-2k}{1+k^2}$ 代入上式得 $k=\dfrac{3}{4}$, ……………………… 10分

$\therefore x_1=-\dfrac{24a^2}{16+9a^2}, x_2=\dfrac{8}{5}$, $\therefore \dfrac{24a^2}{16+9a^2}=\dfrac{8}{5}$, $\therefore a^2=\dfrac{8}{3}$, $c^2=\dfrac{5}{3}$,

$\therefore e=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. ………………………………………………………………………… 12分

21.(本小题满分12分)

解(Ⅰ)当 $a=0$ 时, $\because f(x)=e^x-2x$, $\therefore f'(x)=e^x-2$, ………………………… 1分

令 $f'(x)>0$, 则 $x>\ln 2$; 令 $f'(x)<0$, 则 $x<\ln 2$;

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2]$ 上递减,在 $(\ln 2,+\infty)$ 上递增; ………………………… 3分

$\therefore f(x)_{\min}=f(\ln 2)=2-2\ln 2$; ………………………………………… 4分

(Ⅱ)证法一:原不等式等价于 $a<\dfrac{e^x-2x-\frac{e}{2}+1}{x^2}$, …………………………………… 5分

令 $g(x)=\dfrac{e^x-2x-\frac{e}{2}+1}{x^2}, x>0$,则 $g'(x)=\dfrac{(x-2)e^x+2x+e-2}{x^3}$, …… 6分

令 $h(x)=(x-2)e^x+2x+e-2, x>0$,则 $h'(x)=(x-1)e^x+2$,

令 $t(x)=(x-1)e^x+2$, $x>0$,则 $t'(x)=xe^x>0$,

$\therefore h'(x)=t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增, ………………………………………………… 8分

$\because h'(0)=1>0$, $\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增, …………………………………… 9分

又 $\because h(1)=0$, $\therefore$ 当 $0<x<1$ 时, $h(x)<0$, $\therefore g'(x)<0$, $\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减;

当 $x>1$ 时, $h(x)>0$, $\therefore g'(x)>0$, $\therefore g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增,

$\therefore g(x) \geqslant g(1) = \frac{e}{2} - 1$, …………………………………………………… 11 分

$\because a < \frac{e}{2} - 1$, $\therefore a < g(x)$, $\therefore$ 原命题成立. …………………………………… 12 分

(Ⅱ)证法二:当 $a < \frac{e}{2} - 1$ 时, $\because f(x) = e^x - ax^2 - 2x$, $\therefore f'(x) = e^x - 2ax - 2$,

令 $g(x) = e^x - 2ax - 2, x \in \mathbf{R}$,

则 $g'(x) = e^x - 2a \geqslant 1 - 2a > 1 - 2 \times (\frac{e}{2} - 1) = 3 - e > 0$,

$\therefore f'(x) = g(x) = e^x - 2ax - 2$ 在 $\mathbf{R}$ 上递增,

$\because f'(0) = -1 < 0$, $f'(1) = e - 2a - 2 > e - 2 - 2 \times (\frac{e}{2} - 1) = 0$,

$\therefore$ 存在 $x_0 \in (0,1)$,使得 $f'(x_0) = 0$,

即 $e^{x_0} - 2ax_0 - 2 = 0$, $\therefore a = \frac{e^{x_0} - 2}{2x_0}$, ………………………………………… 6 分

$\therefore$ 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上递减,在 $(x_0, 1)$ 上递增,

$\therefore f(x)_{\min} = f(x_0) = e^{x_0} - ax_0^2 - 2x_0 = e^{x_0} - \frac{1}{2}e^{x_0}x_0 - x_0, 0 < x_0 < 1$, …… 7 分

令 $h(x) = e^x - \frac{1}{2}e^x x - x$, $0 < x < 1$, 则 $h'(x) = \frac{1}{2}e^x(1 - x) - 1$,

令 $t(x) = \frac{1}{2}e^x(1 - x) - 1, 0 < x < 1$, 则 $t'(x) = -\frac{1}{2}xe^x < 0$,

$\therefore h'(x) = t(x) < t(0) = -\frac{1}{2} < 0$, ………………………………………… 10 分

$\therefore h(x) > h(1) = \frac{e}{2} - 1$,, ………………………………………………… 11 分

$\therefore f(x) \geqslant f(x_0) > \frac{e}{2} - 1$. ………………………………………………… 12 分

22.(本小题满分 10 分)

解(Ⅰ) $\because \begin{cases} x = 2\cos\varphi, \\ y = \sin\varphi, \end{cases}$ $\therefore \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, ………………………………………… 2 分

由 $\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ 得曲线 C_2 的直角坐标方程为 $y = \tan\alpha \cdot x - 1$;……………… 4 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = t\cos\alpha, \\ y = -1 + t\sin\alpha \end{cases}$ (t 是参数), ……………… 5 分

设 $A(t_1\cos\alpha, -1 + t_1\sin\alpha), B(t_2\cos\alpha, -1 + t_2\sin\alpha)$,

将 C_2: $\begin{cases} x = t\cos\alpha, \\ y = -1 + t\sin\alpha \end{cases}$ 代入 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,整理得 $t^2(1 + 3\sin^2\alpha) - 8t\sin\alpha = 0$, ……6 分

$\therefore t_1 = 0, t_2 = \frac{8\sin\alpha}{1 + 3\sin^2\alpha}$,

$\therefore |AB|=|t_1-t_2|=\dfrac{8|\sin\alpha|}{1+3\sin^2\alpha}=\dfrac{8}{3|\sin\alpha|+\dfrac{1}{|\sin\alpha|}}\leqslant\dfrac{8}{2\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

(当且仅当 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 取等号), ………………………………………… 8 分

当 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $\because 0<\alpha<\pi$, 且 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}$, $\therefore \cos\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\therefore B(\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3},\dfrac{1}{3})$,

$\therefore |AB|$ 的最大值为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, 此时点 B 的坐标为 $(\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3},\dfrac{1}{3})$. ……………… 10 分

23.(本小题满分 10 分)

解(Ⅰ) $\because m=1$, $\therefore$ 原不等式为 $|x+1|+|2x-1|\geqslant 3$,

$\therefore \begin{cases}x\leqslant -1,\\ -x-1-2x+1\geqslant 3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-1<x<\dfrac{1}{2},\\ x+1-2x+1\geqslant 3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant\dfrac{1}{2},\\ x+1+2x-1\geqslant 3,\end{cases}$ …… ………………………………………… 3 分

$\therefore x\leqslant -1$ 或 $\varnothing$ 或 $x\geqslant 1$,

$\therefore$ 原不等式的解集为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$, ………………………… 5 分

(Ⅱ) 由题意得 $\begin{cases}m>0,\\ m<2m^2,\end{cases}$ $m>\dfrac{1}{2}$, ………………………………… 6 分

当 $x\in[m,2m^2]$ 时, 不等式 $\dfrac{1}{2}f(x)\leqslant|x+1|$ 等价于 $x+m+2x-1\leqslant 2(x+1)$,

$\therefore x\leqslant 3-m$, ………………………………………… 8 分

$\therefore 2m^2\leqslant 3-m$,

$\therefore \dfrac{1}{2}<m\leqslant 1$, $\therefore$ 实数 m 的取值范围 $(\dfrac{1}{2},1]$. ……………………… 10 分