太原市 2017 ~ 2018 学年第一学期高三年级期末考试

数学(文)参考答案及评分意见

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	A	C	B	D	A	C	C	B	D	D

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, $x_0{}^2 + 2x_0 + 2 \leqslant 0$　　14. 12　　15. $\sqrt{10}$　　16. $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{3})$

三、解答题(本大题共 70 分)

17.(本小题满分 12 分)

(1) 由正弦定理得 $a:b:c = 3:4:5$, ……………… 2 分

于是 $a^2 + b^2 = (\frac{3}{5}c)^2 + (\frac{4}{5}c)^2 = c^2$, ……………… 4 分

所以 C 为直角,即 $C = \frac{\pi}{2}$. ……………… 6 分

(2) 由题及(1)得 $\frac{1}{2}ab = \frac{3}{2}$,即 $ab = \frac{3c}{5} \times \frac{4c}{5} = 3$,解得 $c = \frac{5}{2}$, ……………… 9 分

故 $a = \frac{3}{2}, b = 2$, ……………… 11 分

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a + b + c = 6$. ……………… 12 分

18.(本小题满分 12 分)

(1) 由题意得 $a_4 = S_4 - S_3 = 8a_1 = 16$,则有 $a_1 = 2$, ……………… 2 分

所以 $S_n = 2^{n+1} - 2$, ……………… 4 分

当 $n \geqslant 2$ 时,$a_n = S_n - S_{n-1} = 2^n$,令 $n = 1, a_1 = 2$ 成立,

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n = 2^n$. ……………… 6 分

(2) 由(1)得 $b_n = \log_2 a_{n+1} = n + 1$, ……………… 7 分

则 $T_n = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + (n+1) \cdot 2^n$.

$2T_n = \quad 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n + (n+1) \cdot 2^{n+1}$, ……………… 9 分

两式相减得 $-T_n = 4 + (2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - (n+1) \cdot 2^{n+1} = -n \cdot 2^{n+1}$, …… 11 分

所以 $T_n = n \cdot 2^{n+1}$. ……………… 12 分

19.(本小题满分 12 分)

(1) 将每次转动停止时,指针所指区域的颜色按先后顺序写出,有如下结果

红红,红黄,红蓝,红绿,黄红,黄黄,黄蓝,黄绿,

蓝红,蓝黄,蓝蓝,蓝绿,绿红,绿黄,绿蓝,绿绿,

共有 16 个结果,其中有红色的结果有 7 个, ………… 5 分

则此人获得一等奖的概率为$\frac{7}{16}$. ………… 6 分

(2) 此人获得二等奖的概率大于获得鼓励奖的概率, ………… 7 分

两次记录的颜色中没有红色,但不全是冷色的结果有 5 个,

则此人获得二等奖的概率为$\frac{5}{16}$, ………… 9 分

所以此人获得鼓励奖的概率为 $1-\frac{7}{16}-\frac{5}{16}=\frac{4}{16}$, ………… 11 分

此人获得二等奖的概率大于获得鼓励奖的概率. ………… 12 分

20.(本小题满分 12 分)

(1) 因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $PD\perp AD$, ………… 1 分

又在 $\triangle ABC$ 中,因为 $AB=\sqrt{2}DA=\sqrt{2}DB$,

所以 $AD^2+BD^2=AB^2$,即 $\angle ADB=90^\circ$,$AD\perp DB$, ………… 3 分

又 $PD\cap DB=D$,所以 $AD\perp$ 平面 PDB, ………… 4 分

所以 $AD\perp PB$. ………… 5 分

(2) 由题得 $AB=2$, ………… 6 分

则 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}+\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{BC^2-\frac{1}{2}}$

$=1+\frac{\sqrt{2BC^2-1}}{2}$,

$V=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times(1+\frac{\sqrt{2BC^2-1}}{2})=\frac{\sqrt{2}+1}{3}$,解得 $BC^2=\frac{3}{2}$, ………… 9 分

由余弦定理得 $\cos\angle BCD=\frac{BC^2+CD^2-DB^2}{2BC\cdot CD}=\frac{1}{3}$,

所以 $\angle BCD$ 的余弦值为$\frac{1}{3}$. ………… 12 分

21.(本小题满分 12 分)

(1) 由题意 $f'(x)=\frac{2}{e}xe^x+\frac{1}{e}x^2e^x+3ax^2+2bx$, ………… 1 分

则$\begin{cases}f(1)=1+a+b=-\frac{1}{3},\\ f'(1)=3+3a+2b=0,\end{cases}$ ………… 3 分

解得$\begin{cases} a=-\dfrac{1}{3}, \\ b=-1. \end{cases}$ ………………………………………… 5分

(2) 由(1)得 $f(x)=\dfrac{1}{e}x^2e^x-\dfrac{1}{3}x^3-x^2$, ………………………………………… 6分

则 $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{e}x^2e^x-x^3=\dfrac{x^2}{e}(e^x-ex)$,

由 $\dfrac{x^2}{e}\geqslant 0$，则只需判断 $h(x)=e^x-ex$ 的符号，

由 $h'(x)=e^x-e=0$，得 $x=1$，

当 $x<1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 为减函数；当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 为增函数.

所以 $x=1$ 时，$h(x)$ 有极小值，也是最小值，则 $h(x)\geqslant h(1)=0$，

所以 $f(x)-g(x)\geqslant 0$，即 $f(x)\geqslant g(x)$. ………………………………………… 12分

22.(本小题满分10分) 选修4—4:坐标系与参数方程

解(1) 曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2\sqrt{2}x-2y=0$, ………………………… 2分

表示圆心为 $C(\sqrt{2},1)$，半径为 $r=\sqrt{3}$ 的圆，

化为参数方程为$\begin{cases} x=\sqrt{2}+\sqrt{3}\cos\theta \\ y=1+\sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数)， ………………………… 3分

直线 l 的普通方程为 $\sqrt{2}x-y+3=0$. ………………………… 5分

(2) 由题知点 M 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{1}{2}|MA|$，

设点 $M(\sqrt{2}+\sqrt{3}\cos\theta,1+\sqrt{3}\sin\theta)$，

则有点 M 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|4-\sqrt{3}\sin\theta+\sqrt{6}\cos\theta|}{\sqrt{3}}=\dfrac{|4+3\sin(\theta+\varphi)|}{\sqrt{3}}$,

其中 $\cos\varphi=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

当 $\sin(\theta+\varphi)=1$，即 $\theta+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$d_{max}=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$，$|MA|_{max}=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$,

此时 $\cos\theta=\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin\theta=\cos\varphi=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $M(2\sqrt{2},0)$; ………………………… 7分

当 $\sin(\theta+\varphi)=-1$ 即 $\theta+\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$ 时，$d_{min}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$|MA|_{min}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,

此时 $\cos\theta=-\sin\varphi=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin\theta=-\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $M(0,2)$. ………………………… 9分

综上，点 M 坐标为 $(2\sqrt{2},0)$ 时，$|MA|_{max}=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$；点 M 坐标为 $(0,2)$ 时，$|MA|_{min}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

………………………………………………………………………………………… 10分

23.(本小题满分 10 分) **选修 4—5:不等式选讲**

(1) $f(x)\leqslant 5 \Leftrightarrow |x+1|+|x-2|\leqslant 5$,

则有 $\begin{cases}x\leqslant -1,\\ 2x+4\geqslant 0,\end{cases}$ ① 或 $\begin{cases}-1<x<2,\\ -2\leqslant 0,\end{cases}$ ② 或 $\begin{cases}x\geqslant 2,\\ 2x-6\leqslant 0,\end{cases}$ ③ ………………… 2 分

解①得 $-2\leqslant x\leqslant -1$,解②得 $-1<x<2$,解③得 $2\leqslant x\leqslant 3$, ………………… 4 分

则不等式的解集为 $M=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$. ………………………………………… 5 分

(2) $g(x)\geqslant 0\Leftrightarrow x^2-5x+4\leqslant 0$,解得 $1\leqslant x\leqslant 4$,则 $N=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 4\}$, ……… 6 分

所以 $M\cap N=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$, ………………………………………………… 7 分

当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时,$f(x)=3$,$f(x)-g(x)-3=x^2-5x+4=(x-\frac{5}{2})^2-\frac{9}{4}$,

由 $-\frac{3}{2}\leqslant x-\frac{5}{2}\leqslant -\frac{1}{2}$,有 $(x-\frac{5}{2})^2-\frac{9}{4}\leqslant 0$,则 $f(x)\leqslant g(x)+3$ 成立;

当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时,$f(x)=2x-1$,$f(x)-g(x)-3=x^2-3x=x(x-3)$,

由 $x-3\leqslant 0$,$x>0$,知 $f(x)-g(x)-3\leqslant 0$,则 $f(x)\leqslant g(x)+3$ 成立.

综上,$f(x)\leqslant g(x)+3$ 成立. ………………………………………………… 10 分

注:以上各题,其他正确解法相应得分.