$P(X=600)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

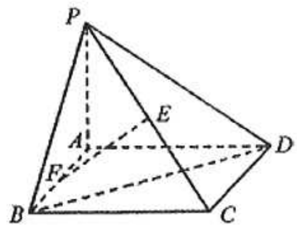
$P(X=800)=2\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{15}$

$P(X=1000)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$

X	0	300	500	600	800	1000
P	$\frac{16}{225}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{16}{75}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{25}$

所以 X 的数学期望 $E(X)=600$

19.如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面$ABCD$ 是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，$PA\perp BD$



（I）求证：$PB=PD$

（II）若 E,F 分别为 PC,AB 的中点，$EF\perp$ 平面PCD，求直线 PB 与平面PCD 所成角的大小

考点：立体几何证明，空间向量计算

解析：（1）连接 AC,BD 交于点 O，连接 PO，$\because$ 底面 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AC\perp BD,OB=OD$

又 $PA\perp BD,PA\subset$ 平面$PAC,AC\subset$ 平面$PAC,PA\cap AC=A$

$\therefore BD\perp$ 平面$PAC,\because PO\subset$ 平面$PAC,\therefore BD\perp PO$

又 $OB=OD,\therefore PB=PD$

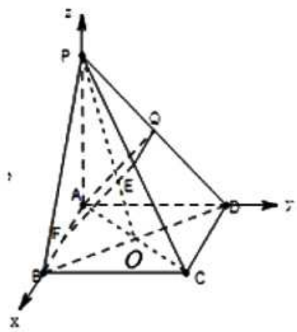
（2）设 PD 的中点为 Q，连接 AQ,EQ，则 $EQ//CD,EQ=\frac{1}{2}CD$，

又 $AF//CD$，$AF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}CD$，$\therefore EQ//AF,EQ=AF$

$\therefore$ 四边形 $AQEF$ 为平行四边形，$\therefore EF//AQ$

$\because EF\perp$ 平面PCD，$\therefore AQ\perp$ 平面PCD

$\therefore AQ\perp PD$，$\because Q$ 是 PD 的中点，$\therefore AP=AD=\sqrt{2}$



$\because AQ\perp$ 平面$PCD,\therefore AQ\perp CD$，又 $AD\perp CD,AQ\cap AD=A$

$\therefore CD\perp$ 平面$PAD,\therefore CD\perp PA$

又 $BD\perp PA,BD\cap CD=D$，$\therefore PA\perp$ 平面$ABCD$

以 A 为坐标原点，以 AB,AD,AP 为坐标轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $B(\sqrt{2},0,0),P(0,0,\sqrt{2}),A(0,0,0),Q(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$

$\therefore \overrightarrow{AQ}=(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}),\overrightarrow{PB}=(\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$ ，$\because AQ\perp$ 平面PCD ，$\therefore \overrightarrow{AQ}$ 为 平面PCD 的一个法向量

$$\therefore \cos\left\langle \overrightarrow{AQ},\overrightarrow{PB}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{PB}}{\left|\overrightarrow{AQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PB}\right|}=-\frac{1}{2}$$

设直线 PB 与平面 PCD 所成角为 θ ，则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle \overrightarrow{AQ},\overrightarrow{PB}\right\rangle\right|=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 直线 PB 与平面 PCD 所成角为 $\frac{\pi}{6}$

20.已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1,A_2 ，右焦点为 $F_2(1,0)$ ，点 $B(1,\frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上。

1）求椭圆方程

2）若直线 $l:y=k(x-4)(k\neq 0)$ 与椭圆 C 交于 M,N 两点，已知直线 A_1M 与 A_2N 相交于点 G ，证明：点 G 在定直线上，并求出定直线的方程。

考点：圆锥曲线综合，椭圆的对称性

解析：（1）$F_2(1,0)$ ，$\therefore c=1$ ，由题目已知条件知 $\begin{cases}a^2=1+b^2\\ \frac{1}{a^2}+\frac{\frac{9}{4}}{b^2}=1\end{cases}$ $\therefore a=2,b=\sqrt{3}$ ，所以 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（2）由椭圆对称性知 G 在 $x=x_0$ 上，假设直线 l 过椭圆上顶点，则 $M(0,\sqrt{3})$ ，

$\therefore k=-\frac{\sqrt{3}}{4},N(\frac{8}{5},\frac{3\sqrt{3}}{5})$ ，$l_{A_1M}:y=\frac{\sqrt{3}}{2}(x+2),l_{A_2N}:y=-\frac{3\sqrt{3}}{2}(x-2),\therefore G(1,\frac{3\sqrt{3}}{2})$,所以 G 在定直线 $x=1$ 上。

当 M 不在椭圆顶点时，设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$

$\begin{cases}y=k(x-4)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$ ，

所以 $x_1+x_2=\frac{32k^2}{3+4k^2},x_1\cdot x_2=\frac{64k^2-12}{3+4k^2}$

$l_{A_1M}:y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2),l_{A_2N}:y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$, 当 $x=1$ 时，$\frac{3y_1}{x_1+2}=\frac{-y_2}{x_2-2}$ 得 $2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8=0$

所以 $2\frac{64k^2-12}{3+4k^2}-5\frac{32k^2}{3+4k^2}+\frac{8(3+4k^2)}{3+4k^2}=0$ 显然成立，所以 G 在定直线 $x=1$ 上。

21. $f(x)=a(x-1),g(x)=(ax-1)e^x,a\in R.$

（1）证明：存在唯一实数 a ，使得直线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 相切。

（2）若不等式 $f(x)>g(x)$ 有且只有两个整数解，求 a 的范围。

考点：（1）切线方程，隐零点问题。（2）整数解问题，参变分离。

解：（1）设切点为 (x_0,y_0)，则 $y_0=a(x_0-1)=(ax_0-1)e^{x_0}, a(x_0e^{x_0}-x_0+1)=e^{x_0}$①，

$y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 相切，则 $a=g'(x_0)=(a+ax_0-1)e^{x_0}, a(x_0e^{x_0}+e^{x_0}-1)=e^{x_0}$②，所以 $x_0e^{x_0}-x_0+1=x_0e^{x_0}+e^{x_0}-1$，

即 $e^{x_0}+x_0-2=0$。令 $h(x)=e^x+x-2, h'(x)=e^x+1>0$，所以 $h(x)$ 单增。又因为 $h(0)=-1<0$，$h(1)=e-1>0$，所以，存在唯一实数

x_0，使得 $e^{x_0}+x_0-2=0$，且 $x_0\in(0,1)$。所以只存在唯一实数 a，使①②成立，即存在唯一实数 a 使得 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 相切。

(2)令 $f(x)>g(x)$，即 $a(x-1)>(ax-1)e^x$，所以 $a(x-\frac{x-1}{e^x})<1$

令 $m(x)=x-\frac{x-1}{e^x}$，则 $m'(x)=\frac{e^x+x-2}{e^x}$，由(1)可知，$m(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单减，在 $(x_0,+\infty)$ 单增，且 $x_0\in(0,1)$

故当 $x\le 0$ 时，$m(x)\ge m(0)=1$，当 $x\ge 1$ 时，$m(x)\ge m(1)=1$，

当 $a<0$ 时，因为要求整数解，所以 $m(x)$ 在 $x\in Z$ 时，$m(x)\ge 1$，所以 $am(x)<1$ 有无穷多整数解，舍去；

当 $0<a<1$ 时，$m(x)<\frac{1}{a}$，又 $\frac{1}{a}>1, m(0)=m(1)=1$，所以两个整数解为 0,1，即 $\begin{cases} m(2)\ge\frac{1}{a} \\ m(-1)\ge\frac{1}{a} \end{cases}$

所以 $a\ge\frac{e^2}{2e^2-1}$，即 $a\in[\frac{e^2}{2e^2-1},1)$

当 $a\ge 1$ 时，$m(x)<\frac{1}{a}$，因为 $\frac{1}{a}\le 1, m(x)$ 在 $x\in Z$ 内大于或等于 1，

所以 $m(x)<\frac{1}{a}$ 无整数解，舍去

综上，$a\in[\frac{e^2}{2e^2-1},1)$

22.在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 过点 $P\ a,1$，其参数方程为 $\begin{cases} x=a+\sqrt{2}t, \\ y=1+\sqrt{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数，$a\in R$），以 O 为极点，x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta+4\cos\theta-\rho=0$

（1）求曲线 C_1 的普通方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

（2）求已知曲线 C_1 和曲线 C_2 交于 A,B 两点，且 $|PA|=2|PB|$，求实数 a 的值。

考点:参数方程极坐标方程和直角坐标方程的互化，直线的参数方程中 t 的几何意义

解析：

（1）C_1 的参数方程 $\begin{cases}x=a+\sqrt{2}t,\\ y=1+\sqrt{2}t\end{cases}$ 消参得普通方程为 $x-y-a+1=0$

C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta+4\cos\theta-\rho=0$ 两边同乘 ρ 得 $\rho^2\cos^2\theta+4\rho\cos\theta-\rho^2=0$ 即 $y^2=4x$

（2）将曲线 C_1 的参数方程标准化为 $\begin{cases}x=a+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数，$a\in R$）代入曲线 C_2：$y^2=4x$ 得 $\frac{1}{2}t^2-\sqrt{2}t+1-4a=0$ 由

$\Delta=\ -\sqrt{2}\ ^2-4\times\frac{1}{2}\ 1-4a\ >0$ 得 $a>0$

设 A,B 对应的参数为 t_1,t_2，由题得 $|t_1|=2|t_2|$ 即 $t_1=2t_2$ 或 $t_1=-2t_2$

当 $t_1=2t_2$ 时，$\begin{cases}t_1=2t_2\\ t_1+t_2=2\sqrt{2}\\ t_1t_2=2\ 1-4a\end{cases}$ 解得 $a=\frac{1}{36}$

当 $t_1=-2t_2$ 时，$\begin{cases}t_1=-2t_2\\ t_1+t_2=2\sqrt{2}\\ t_1t_2=2\ 1-4a\end{cases}$ 解得 $a=\frac{9}{4}$

综上：$a=\frac{1}{36}$ 或 $\frac{9}{4}$

22．（本小题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x+m|+|2x-1|$。

（1）当 $m=-1$ 时，求不等式 $f(x)\le 2$ 的解集；

（2）若 $f(x)\le|2x+1|$ 的解集包含 $[\frac{3}{4},2]$，求 m 的取值范围。

考点：绝对值不等式

解析：（1）当 $m=-1$ 时，$f(x)=|x-1|+|2x-1|$，

①当 $x\ge 1$ 时，$f(x)=3x-2\le 2$，解得 $1\le x\le\frac{4}{3}$；

②当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时，$f(x)=x\le 2$，解得 $\frac{1}{2}<x<1$；

③当 $x\le\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=2-3x\le 2$，解得 $0\le x\le\frac{1}{2}$

综合①②③可知，原不等式的解集为 $\{x|0\le x\le\frac{4}{3}\}$

（2）由题意可知 $f(x)\le|2x+1|$ 在 $[\frac{3}{4},2]$ 上恒成立，当 $x\in[\frac{3}{4},2]$ 时，$f(x)=|x+m|+|2x-1|=|x+m|+2x-1\le|2x+1|=2x+1$，从而可得 $|x+m|\le2$，即 $-2\le x+m\le2\Leftrightarrow-2-x\le m\le2-x$，且 $(-2-x)_{\max}=-\frac{11}{4},(2-x)_{\min}=0$，因此 $m\in[-\frac{11}{4},0]$