



答案: C

解析: 由 $f(0) = -f(\frac{\pi}{2})$ 可得 $\omega = \frac{2}{3} + 4k, (k \in \mathbb{Z})$, 又函数在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上仅有 3 个零点, 故 $\frac{2\pi}{\omega} < \frac{\pi}{2} < \frac{3}{2} \frac{2\pi}{\omega}$, 可得 $4 < \omega < 6$, 故选 C

11. 三棱锥 $D-ABC$ 中, $CD \perp$ 底面 ABC , $\triangle ABC$ 为等边三角形, 若 $AE \parallel CD, AB = CD = AE = 2$, 则三棱锥 $D-ABC$ 与三棱锥 $E-ABC$ 的公共部分构成的几何体体积为_____

- A. $\frac{\sqrt{3}}{9}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\sqrt{3}$

考点: 几何体体积的求解

答案: B

解析: 两棱锥公共部分的高为 1, 故体积为 $\frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{3}$

12. 已知定义在 \mathbb{R} 上的函数满足 $f(x) + f(-x) = 4x^2 + 2$, 设 $g(x) = f(x) - 2x^2$, 若 $g(x)$ 的最大值和最小值分别为 M 和 m , $M + m =$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

考点: 函数中心对称性

答案: B

解析: 由题意可得: $g(x) + g(-x) = f(x) - 2x^2 + f(-x) - 2x^2 = f(x) + f(-x) - 4x^2 = 2$

故 $g(x)$ 关于 $(0, 1)$ 中心对称, 故 $M + m = 2$

二. 填空题: 本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分

13. 若双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的离心率为 2, 则 $b =$ _____

考点: 双曲线的简单几何性质

答案: $\sqrt{3}$

解析: $a = 1$ $e = \frac{c}{a} = \frac{c}{1} = 2$ 所以 $c = 2$

$\therefore b^2 = c^2 - a^2 = 4 - 1 = 3$ $\therefore b = \sqrt{3}$





14. 函数 $y = e^x + \sin x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程是_____

考点: 导数的几何意义

答案: $2x - y + 1 = 0$

解析: $y' = e^x + \cos x$ $k = e^0 + \cos 0 = 2$

切线方程为 $y - 1 = 2x$, 即 $2x - y + 1 = 0$

15. 在正方形 $ABCD$ 中, M, N 分别是 BC, CD 的中点, 若 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AM} + \mu \overrightarrow{AN}$, 则实数 $\lambda + \mu =$

考点: 向量的线性运算

答案: $\frac{4}{3}$

解析: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, $\therefore 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$

$\therefore \lambda + \mu = \frac{4}{3}$

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n - a_{n-1} (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2)$, $a_1 = 2018, a_2 = 2017$, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 S_{100} 的值为

考点: 数列的性质

答案: 2016

解析: $\because a_{n+1} = a_n - a_{n-1}, \therefore a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \Rightarrow a_{n+2} = -a_{n-1} \Rightarrow T = 6, \therefore S_6 = 0 \Rightarrow S_{100} = 96S_6 + S_4 = 2016$

三. 解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{a}{\cos C \cos B} = \frac{b}{\sin B} + \frac{c}{\cos C}$.

(1) 求角 B ;

(2) 若 $b = \sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

考点: 正弦定理、余弦定理的应用

解析:

(1) 利用正弦定理得:

$$\frac{\sin A}{\cos C \sin B} = \frac{\cos C + \sin C}{\cos C},$$





$$\sin B \cos C + \sin B \sin C = \sin B \cos C + \cos B \sin B, \text{ 又 } \sin B \neq 0$$

$$\text{所以, } \tan B = 1, B = \frac{\pi}{4}$$

(2) 由正弦定理得:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 = 2R, \therefore R = 1$$

$$S_{\max} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$$

18. (本小题满分 12 分)

某校倡导为特困学生募捐,要求在自动购水机处每购买一瓶矿泉水,便自觉向捐款箱中至少投入一元钱,现统计了连续 5 天的售出矿泉水箱数和收入情况,列表如下:

售出水量 x (单位: 箱)	7	6	6	5	6
收入 y (单位: 元)	165	142	148	125	150

学校计划将捐款以奖学金的形式奖励给品学兼优的特困生,规定:特困生综合考核前 20 名,获一等奖金 500 元;综合考核 21-50 名,获二等奖金 300 元;综合考核 50 名以后的不获得奖学金。

(I) 若 x 与 y 成线性相关,则某天售出 9 箱水时,预计收入为多少元?

(II) 假设甲、乙、丙三名学生均获奖,且各自获一等奖和二等奖的可能性相同,求三人获得奖学金之和不超 1000 元的概率。

考点: 线性规划, 古典概型

解析:

(I) 由题意可求得回归方程为 $\hat{y} = 20\hat{x} + 26$, 据此预测售出 8 箱水时, 预计收入为 206 元;

$$\bar{x} = \frac{7+6+6+5+6}{5} = 6, \quad \bar{y} = \frac{165+142+148+125+150}{5} = 146,$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{19+0+0+21+0}{1+0+0+1+0} = 20, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 146 - 20 \times 6 = 26 \therefore \hat{y} = 20\hat{x} + 26$$

当 $x = 9$ 时, $\hat{y} = 20 \times 9 + 26 = 206$

即某天售出 9 箱水的预计收益是 206 元。

(II) 设事件 A_1 : 甲获一等奖; 事件 A_2 : 甲获二等奖

事件 B_1 : 乙获一等奖; 事件 B_2 : 乙获二等奖





事件 C_1 : 丙获一等奖; 事件 C_2 : 丙获二等奖

则总事件有: (A_1, B_1, C_1) , (A_1, B_1, C_2) , (A_1, B_2, C_1) , (A_1, B_2, C_2) , (A_2, B_1, C_1) , (A_2, B_1, C_2) , (A_2, B_2, C_1) , (A_2, B_2, C_2) , 8 种情况

甲、乙、丙三人奖金不超过 1000 的事件有 (A_2, B_2, C_2) 1 种情况

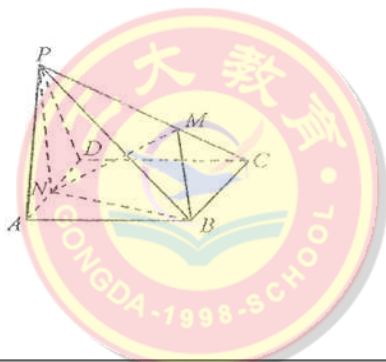
则求三人获得奖学金之和不超过 1000 元的概率 $P = \frac{1}{8}$

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $PA = PD = AD = 2$, 点 M 在线段 PC 上, 且 $PM = 2MC$, N 为 AD 的中点.

(1) 证明: $AD \perp$ 平面 PNB ;

(2) 若平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 求三棱锥 $P-NBM$ 的体积.



工大教育

——做最感动客户的专业教育组织

考点: 立体几何中线面位置关系证明, 棱锥体积

解析:

(1) 连接 BD

$PA = PD$, N 为 AD 的中点

$\therefore PN \perp AD$

又 底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 60^\circ$

$\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形

$\therefore BN \perp AD$

又 $\because PN \cap BN = N$

$\therefore AD \perp$ 平面 PNB

$\because PA = PD = AD = 2$

$\therefore PN = NB = \sqrt{3}$

