



## 太原市 2018 年高三年级模拟试题（二）

### 文科数学

一. 选择题： 本题共 12 个题，每题 5 分，共 60 分，在每个题给出的四个选项中，只有一个符合要求的.

1. 设集合  $A = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$ ,  $B = N$ ，则集合  $A \cap B$  的子集的个数是（ ）

A. 4      B. 6      C. 8      D. 16

**考点：**集合的运算

**答案：**C

**解析：**

$$\begin{cases} A = \{x | -1 \leq x \leq 2\} \\ B = N \end{cases} \Rightarrow A \cap B = \{0, 1, 2\}, \text{ 则子集的个数: } 2^3 = 8$$

故选 C

2.  $\frac{(2+i)(1-i)^2}{1-2i} = ( \quad )$

A. 2      B. -2      C.  $\frac{1}{3}$       D.  $-\frac{1}{3}$

**考点：**复数的运算

**答案：**A

**解析：**

$$\frac{(2+i)(1-i)^2}{1-2i} = \frac{(2+i)(-2i)}{1-2i} = \frac{2-4i}{1-2i} = 2$$

故选 A

3. 设等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 则 " $a_1 > 0$ " 是 " $S_3 > S_2$ " 的（ ）

A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 既不充分也不必要条件      D. 充要条件





**考点：**等比数列，命题逻辑

**答案：**D

**解析：**

设等比数列公比为  $q$

$$S_3 > S_2 \Rightarrow S_3 - S_2 = a_3 > 0,$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2, \quad q^2 > 0$$

所以,  $a_1 > 0 \Leftrightarrow a_3 > 0$

故选 D

4. 下列函数中，既是奇函数又在  $(0, +\infty)$  上单调递增的函数是 ( )

A.  $y = e^x + e^{-x}$

B.  $y = \ln(|x| + 1)$

C.  $y = \frac{\sin x}{|x|}$

D.  $y = x - \frac{1}{x}$

**考点：**函数的性质

**答案：**D

**解析：**

A. 函数  $y = e^x + e^{-x}$  是偶函数

B. 函数  $y = \ln(|x| + 1)$  是偶函数

C. 函数  $y = \frac{\sin x}{|x|}$  是奇函数，但在  $(0, +\infty)$  上不是单调递增的函数

D. 函数  $y = x - \frac{1}{x}$  是奇函数且  $(0, +\infty)$  上单调递增的函数

故选 D

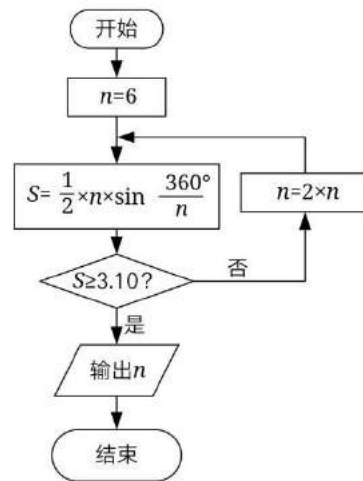




5. 公元 263 年左右,我国数学家刘徽发现当圆内接正多边形的边数无限增加时,多边形面积可无限逼近圆的面积,并创立了“割圆术”,利用“割圆术”,刘徽得到了圆周率精确到小数点后两位的近似值 3.14,这就是著名的“徽率”,如图是利用刘徽的“割圆术”思想设计的一个程序框图,则输出  $n$  的值为 ( )

(参考数据:  $\sin 15^\circ \approx 0.2588, \sin 7.5^\circ \approx 0.1305$ )

A. 12      B. 18      C. 24      D. 48



**考点：**循环结构

**答案：**C

**解析：**

①  $n=6, S \approx 2.598 < 3.1$

②  $n=12, S=3 < 3.1$

③  $n=24, S=3.1056 > 3.1$

结束循环, 输出  $n=24$

故选 C

6. 某班从 3 名男生和 2 名女生中任意取 2 名学生参加活动, 则抽到 2 名学生性别相同的概率为 ( )

A.  $\frac{3}{5}$       B.  $\frac{2}{5}$       C.  $\frac{3}{10}$       D.  $\frac{1}{2}$

**考点：**古典概型

**答案：**B

**解析：**

记 3 名男生和 2 名女生分别为  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2$





构成事件的基本空间  $\Omega = \{(A_1, A_2), (A_1, A_3), \dots, (B_1, B_2)\} = 10$

设抽到 2 名学生性别相同的事件为  $A$ ,

则构成事件  $A$  的基本空间  $\Omega_A = \{(A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_2, A_3), (B_1, B_2)\} = 4$

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

故选 B

7. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的半焦距为  $c$ , 原点  $O$  到经过两点  $(c, 0), (0, b)$  的直线的距离为  $\frac{c}{2}$ , 则椭圆的离心率为 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     C.  $\frac{1}{2}$     D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**考点:** 椭圆的性质

**答案:** A

**解析:**

法①: 根据等面积

$$\frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}a \cdot \frac{c}{2} \Rightarrow a = 2b$$

$$\text{离心率: } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

故选 A

法②:

两点所在的直线方程:  $bx + cy - bc = 0$

$$\text{原点到直线的距离: } d = \frac{|-bc|}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{bc}{a} = \frac{c}{2} \Rightarrow a = 2b$$

$$\text{离心率: } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{3}}{2}$$





故选 A



# 工大教育

——做最感动客户的专业教育组织

8. 已知  $a = 2^{1.1}$ ,  $b = 5^{0.4}$ ,  $c = \ln \frac{5}{2}$ , 则 ( )

- A.  $b > c > a$       B.  $a > c > b$       C.  $b > a > c$       D.  $a > b > c$

**考点：**指对数大小比较

**答案：**D

**解析：**  $a = 2^{1.1} > 2^1 = 2$ ,  $1 < b = 5^{0.4} = 5^{\frac{2}{5}} < 2^{\frac{5}{5}} = 2$ ,  $c = \ln \frac{5}{2} < \ln e = 1$ , 故  $a > b > c$ .

故选 D

9. 已知函数  $f(x) = a \sin x - \sqrt{3} \cos x$  的一条对称轴为  $x = -\frac{\pi}{6}$ , 若  $f(x_1) \cdot f(x_2) = -4$ , 则  $|x_1 + x_2|$  的最小值为 ( )

- A.  $\frac{\pi}{3}$       B.  $\frac{\pi}{2}$       C.  $\frac{2\pi}{3}$       D.  $\frac{3\pi}{4}$





**考点：**三角函数的性质

**答案：**C

**解析：**  $f(x) = a \sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{a^2 + 3} \sin(x + \varphi)$ ，由函数对称轴  $x = -\frac{\pi}{6}$ ，可得：

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}, \text{ 即 } \left| -\frac{1}{2}a - \frac{3}{2} \right| = \sqrt{a^2 + 3}, \text{ 平方求解可得 } a = 1,$$

$$\text{则 } f(x) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{又 } f(x_1) \cdot f(x_2) = -4, \quad x_1, x_2 \text{ 为最值点}$$

$$\text{不妨 } x_1 = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad x_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, \quad |x_1 + x_2| = 4k\pi + \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{故在 } k=0 \text{ 时取得最小值 } |x_1 + x_2| = \frac{2\pi}{3}.$$

故选 C

10. 已知实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} y \geq 0 \\ x + y \leq 0 \\ 2x + y + 2 \leq 0 \end{cases}$  若  $ax - y + 1 - a \geq 0$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

A.  $(-\infty, -2]$

B.  $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$

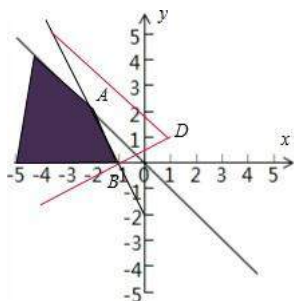
C.  $(-\infty, -1]$

D.  $\left[-\infty, -\frac{1}{3}\right]$

**考点：**线性规划

**答案：**C

**解析：**



可行域如图所示, 自变量  $x \leq 0$ , 由  $ax - y + 1 - a \geq 0$  可化简得  $a \leq \frac{y-1}{x-1}$ , 过  $(1, 1)$  直线, 当且仅当斜





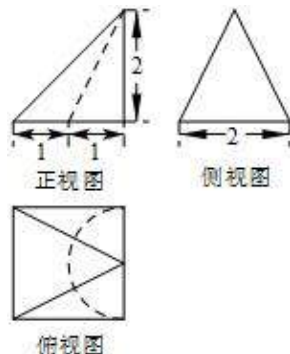


率小于等于-1时恒成立, 故  $a \leq -1$ .

故选 C

11. 某空间几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ( )

- A.  $\frac{7}{3}\pi$   
B.  $\frac{8-\pi}{3}$   
C.  $\frac{7-\pi}{3}$   
D.  $\frac{8}{3}\pi$



**考点:** 根据三视图求几何体体积

**答案:** B

**解析:**

三视图易知为切割体, 四棱锥切去半个圆锥所得, 故  $V = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \pi \times 1^2 \times 2 = \frac{8-\pi}{3}$ ,

故选 B

12. 已知函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$  有两个极值点  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ , 若  $x_1 + 2x_0 = 3x_2$ , 则函数

$g(x) = f(x) - f(x_0)$  ( )

- A. 恰有一个零点      B. 恰有两个零点  
C. 恰有三个零点      D. 零点个数不确定

**考点:** 导数与极值

**答案:** B

**解析:**

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ ,  $f(x)$  有两个极值点, 故  $f'(x) = 0$  有两个根  $x_1 + x_2 = -\frac{2a}{3}$  ①,

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b}{3}$$

又  $x_1 + 2x_0 = 3x_2$  可得:  $x_0 = \frac{3x_2 - x_1}{2} = x_2 + \frac{x_2 - x_1}{2} > x_2$ ,





取  $f(x_1) = f(x)$  的一解为  $t$ ,

$$\text{则 } x^3 + ax^2 + bx - f(x_1) = (x - x_1)^2(x - t),$$

$$\text{得 } t = -a - 2x_1 \text{ ②}$$

联立①②可得:  $t = \frac{3x_2 - x_1}{2} = x_0$  故  $f(x_1) = f(t) = f(x_0)$ , 有且只有两个零点

故选 B

二. 填空题: 本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分

13. 已知非零向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = \sqrt{2}|\vec{b}|$ , 且  $(\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + 3\vec{b})$ , 则向量  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角的余弦值为\_\_\_\_\_.

**考点:** 向量的数量积

**答案:**  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

**解析:**

$$\text{由题有: } (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 3|\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta - 3|\vec{b}|^2 = 0$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{3|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{3 - \left(\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\right)^2}{2\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}} = \frac{3 - \sqrt{2}^2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

14. 双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  上一点  $M(-3, 4)$  关于一条渐近线的对称点恰为双曲线的右焦点

$F_2$ , 则该双曲线的标准方程为\_\_\_\_\_.

**考点:** 双曲线的标准方程

**答案:**  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$

**解析:**







渐近线为:  $y = \pm \frac{b}{a}x$

设  $F_2(c, 0)$ , 由图知  $M(-3, 4)$  关于  $y = \frac{b}{a}x$  的对称点为  $F_2(c, 0)$ ,

$$\therefore \begin{cases} \frac{4}{2} = \frac{b}{a} \frac{c-3}{2} \\ \frac{4}{-3-c} = -\frac{a}{b} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} c=5 \\ \frac{b}{a}=2 \end{cases}$$

又  $\because a^2 + b^2 = c^2$ ,  $\therefore a^2 = 5, b^2 = 20$ ,  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$  即为所求。

15. 已知菱形  $ABCD$  中,  $AB = 6\sqrt{3}$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ , 沿对角线  $BD$  折成二面角  $A-BD-C$  为  $60^\circ$  的四面体, 则四面体  $ABCD$  的外接球的表面积为\_\_\_\_\_.

**考点:** 四面体的外接球

**答案:**  $156\pi$

**解析:**

依题有: 外接球的球心位于过底面  $BCD$  的外心的垂线上, 设球心  $O$  到底面  $BCD$  的距离为  $x$ , 半径为  $r$ , 由几何关系有:  $r^2 = 36 + x^2$

$$\text{又由 } OA^2 = r^2 = \left(\frac{9\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = x^2 + 36 \text{ 得: } x = \sqrt{3}, \therefore r^2 = 39, S = 4\pi r^2 = 156\pi$$

16. 数列  $\{a_n\}$  中, 若  $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1}, a_n = \frac{b_n + 2}{b_n - 1}, n \in N^*$ , 则数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为\_\_\_\_\_.

**考点:** 数列的前  $n$  项和

**答案:**  $4(2^n - 1)$

**解析:**

$$\text{由 } a_n = \frac{b_n + 2}{b_n - 1} \text{ 得: } b_n = \frac{3}{a_n - 1} + 1, b_1 = \frac{3}{a_1 - 1} + 1 = 4$$





$$\text{由 } a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1} \text{ 得: } \frac{3}{a_{n+1} - 1} + 1 = -2 \left( \frac{3}{a_n - 1} + 1 \right), \text{ 即 } b_{n+1} = -2b_n$$

$\therefore |b_{n+1}| = 2|b_n|$ , 即  $\{|b_n|\}$  是以 4 为首项, 2 为公比的等比数列

$$\therefore S_n = \frac{4 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} = 4(2^n - 1), n \in N^*$$

三. 解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17 ~ 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

17. (本小题满分 12 分)

已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $a \tan A = \sqrt{3}(c \cos B + b \cos C)$ .

(I) 求角  $A$ ;

(II) 若点  $D$  满足  $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$ , 且  $BD = 3$ , 求  $2b + c$  的取值范围.

**考点: 解三角形**

**答案:** (I)  $\because a \tan A = \sqrt{3}(c \cos B + b \cos C)$

$$\therefore \sin A \cdot \frac{\sin A}{\cos A} = \sqrt{3}(\sin C \cdot \cos B + \sin B \cos C)$$

$$\therefore \sin A \cdot \frac{\sin A}{\cos A} = \sqrt{3} \sin A$$

$$\therefore \tan A = \sqrt{3}, A = \frac{\pi}{3}$$

$$(II) \because \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}, BD = 3$$

$$\therefore \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{c^2 + (2b)^2 - 9}{2 \times 2b \times c}$$

$$\therefore \frac{(2b + c)^2 - 4bc - 9}{2bc} = 1$$





$$\therefore (2b+c)^2 - 2 \cdot 2bc - 9 = 2bc$$

$$\therefore (2b+c)^2 - 9 = 3 \cdot 2bc \leq 3 \cdot \left(\frac{2b+c}{2}\right)^2$$

$$\therefore (2b+c)^2 - 9 \leq 3 \cdot \frac{(2b+c)^2}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{4}(2b+c)^2 \leq 9, (2b+c)^2 \leq 36$$

$$\therefore 3 < 2b+c \leq 6$$

18. (本小题满分12分)

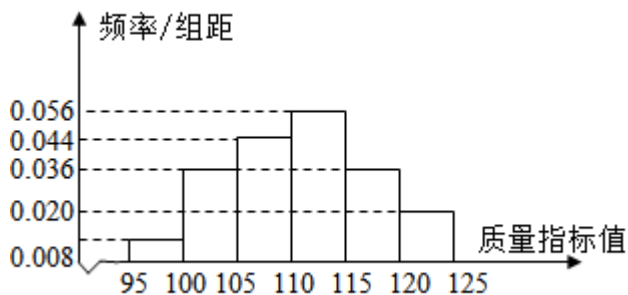
按照国家质量标准：某种工业产品的质量指标落在 $[100,120)$ 内，则为合格品，否则为不合格品。

某企业有甲、乙两套设备生产这种产品，为了检测这两套设备的生产质量情况，随机从两套设备生产的大量产品中各抽取了50件产品作为样本，对规定的质量指标值进行检测，表1是甲套设备的样本频数分布表，图1是乙套设备的样本频率分布直方图。

表1：甲套设备的样本频数分布表

质量指标值	$[95,100)$	$[100,105)$	$[105,110)$	$[110,115)$	$[115,120)$	$[120,125)$
频数	1	4	19	20	5	1

图1：乙套设备的样本频率分布直方图



(1) 将频率视为概率. 若乙套设备生产了5000件产品，则其中的不合格品约有多少件；





(II) 填写下面列联表, 并根据列联表判断是否有 90% 的把握认为该企业生产的这种产品的质量指标值与甲、乙两套设备的选择有关;

	甲套设备	乙套设备	合计
合格品			
不合格品			
合计			

(III) 根据表1和图1, 对两套设备的优劣进行比较.

附:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.050	0.025	0.010
$k_0$	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

**考点: 统计与概率**

**答案:** 由表1 可知甲套设备的样本中合格品有 48 件, 不合格品有 2 件;

由图1可知乙套设备的样本中合格品有 43 件, 不合格品有 7 件。

$$(I) P(\text{乙不合格}) = (0.008 + 0.020) \times 5 = 0.04 + 0.1 = 0.14$$

所以不合格品约有  $5000 \times 0.14 = 700$  (件)

(II)

	甲套设备	乙套设备	合计
合格品	48	43	91
不合格品	2	7	9
合计	50	50	100

$$K^2 = \frac{100 \times (48 \times 7 - 43 \times 2)^2}{50 \times 50 \times 9 \times 91} \approx 3.053 > 2.706$$





故有 90% 的把握认为有关；

(III) 甲套设备生产合格率约为  $\frac{48}{50}$

乙套设备生产合格率约为  $\frac{43}{50}$

甲套生产的产品主要集中在  $[100, 120)$  之间

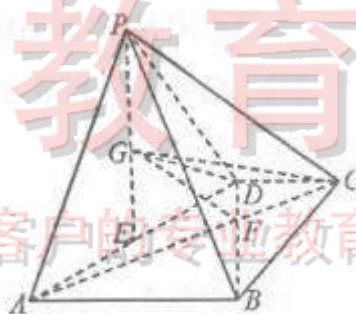
乙套生产的产品与甲套相比比较分散

因此，甲套设备生产的合格率更高，且相对稳定，从而甲套设备优于乙套设备。

19. 四棱锥  $P-ABCD$  中，平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ，底面  $ABCD$  为梯形， $AB \parallel CD$ ， $AB = 2DC = 2\sqrt{3}$ ， $AB \cap BD = F$ ， $\triangle PAD$  与  $\triangle ABD$  均为正三角形， $E$  为  $AD$  的中点， $G$  为  $\triangle PAD$  重心。

(I) 求证： $GF \perp$  平面  $PDC$ ；

(II) 求三棱锥  $G-PCD$  的体积。



**考点：**立体几何线面关系和棱锥体积

**解析：**

(I) 证明：连接  $AG$  并延长交  $PD$  于点  $H$ ，连接  $HC$

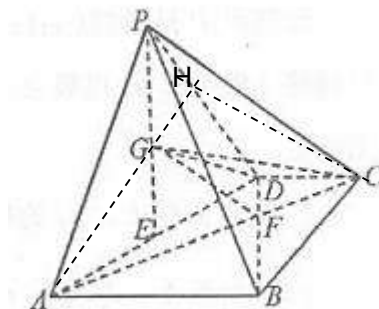
由于  $AB \parallel CD$ ，且  $\frac{DC}{AB} = \frac{1}{2}$ ，可得  $\frac{FC}{FA} = \frac{1}{2}$

又等边  $\triangle PAD$  中， $G$  为重心，则  $\frac{GH}{GA} = \frac{1}{2}$

故在  $\triangle ACH$  中  $\frac{AF}{FC} = \frac{AG}{GH}$

则  $GF \parallel HC$

又  $HC \subset$  面  $PDC$ ，故  $GF \parallel$  面  $PDC$







$$(11) V_{G-PCD} = V_{P-CDG} = V_{P-CDE} - V_{G-CDE}$$

$$S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\begin{aligned} V_{P-CDE} &= \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{4} \times 3 - \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{4} \times 1 \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{4} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

20. 已知以点  $C(0,1)$  为圆心的动圆  $C$  与  $y$  轴负半轴交于点  $A$ ，其弦  $AB$  的中点  $D$  恰好落在  $x$  轴上.

(1) 求点  $B$  的轨迹  $E$  的方程；

(11) 过直线  $y = -1$  上一点  $P$  作曲线  $E$  的两条切线，切点分别为  $M, N$ . 求证：直线  $MN$  过定点.

**考点：**立体几何线面关系和棱锥体积

**解析：**

(1) 设  $B(x, y)$ ，中点  $D(\frac{x}{2}, 0)$ ， $C(0, 1)$

$$\overrightarrow{CD} = (\frac{x}{2}, -1), \quad \overrightarrow{DB} = (\frac{x}{2}, y)$$

$$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - y = 0$$

$$\text{即 } x^2 = 4y (y \neq 0)$$

所以点  $B$  的轨迹  $E$  的方程为  $x^2 = 4y (y \neq 0)$

(11) 设  $P(t, -1)$ ，则切线方程为  $y + 1 = k(x - t)$

$$\text{联立直线与曲线方程 } \begin{cases} y + 1 = k(x - t) \\ x^2 = 4y \end{cases} \Rightarrow x^2 - 4kx + 4kt + 4 = 0$$







$$\Delta = 16k^2 - 4(4kt + 4) = 0$$

$$\Rightarrow 16k^2 - 16kt - 16 = 0$$

由相切可得  $\Rightarrow k^2 - kt - 1 = 0$

$$\Rightarrow k^2 = kt + 1$$

所以  $k_1 \cdot k_2 = -1$ , 代入  $x^2 - 4kx + 4kt + 4 = 0$

得:  $x^2 - 4kx + 4k^2 = 0$

即:  $(x - 2k)^2 = 0, x = 2k$

所以切点  $M(2k_1, k_1^2), N(2k_2, k_2^2)$

$$k_{MN} = \frac{k_2^2 - k_1^2}{2k_2 - 2k_1} = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$y - k_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{2}(x - 2k_1)$$

当  $x = 0$  时,  $y = \frac{k_1 + k_2}{2}(-2k_1) - k_1^2 = \frac{-2k_1k_2}{2} = -k_1k_2 = 1$

所以过定点 (0,1)

21.(本题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = m \ln x - e^{-x} (m \neq 0)$

(I) 若函数  $f(x)$  是单调函数, 求实数  $m$  的取值范围;

(II) 证明: 对于所有的正实数  $a, b$ , 当  $a > b$  时, 都有  $e^{1-a} - e^{1-b} > 1 - \frac{a}{b}$ .

**考点:** 函数与导数

**答案:** (I) 当  $m > 0$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增;

当  $m \leq -\frac{1}{e}$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减..

(II) 证明如下.





**解析:** (I) 定义域  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = \frac{m}{x} + e^{-x} = \frac{me^x + x}{xe^x} (m \neq 0)$

当  $m > 0$  时,  $f'(x) > 0$ , 故  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增;

当  $m < 0$  时

1) 若  $me^x + x > 0$ , 可得  $m > -\frac{x}{e^x}$ .

令  $g(x) = -\frac{x}{e^x}$ , 则  $g'(x) = \frac{x-1}{e^x}$ , 可知  $g(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

故  $g(x) = -\frac{x}{e^x}$  在  $(0, +\infty)$  无最大值,  $me^x + x > 0$  不成立;

2) 若  $me^x + x \leq 0$ , 可得  $m \leq -\frac{x}{e^x}$ .

令  $g(x) = -\frac{x}{e^x}$ , 则  $g(x) \geq g(1) = -\frac{1}{e}$ . 故当  $0 < m \leq -\frac{1}{e}$  时,  $f'(x) \leq 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减。

综上所述:

当  $m > 0$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增;

$m \leq -\frac{1}{e}$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减。

(II) 由(1)可知:  $m = -\frac{1}{e}$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减。

当  $a > b > 0$  时,  $f(b) > f(a)$ , 即  $-\frac{1}{e} \ln b - e^{-b} > -\frac{1}{e} \ln a - e^{-a}$

化简得:  $e^{1-a} - e^{1-b} > \ln b - \ln a$

要证  $e^{1-a} - e^{1-b} > 1 - \frac{a}{b}$ , 只要证  $\ln b - \ln a > 1 - \frac{a}{b}$ , 即证  $\ln \frac{b}{a} > 1 - \frac{a}{b}$

令  $t = \frac{b}{a} (0 < t < 1)$ , 则只要证  $h(t) = \ln t + \frac{1}{t} - 1 > 0$

$h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} = \frac{t-1}{t^2}$ , 故在  $0 < t < 1$  上  $h(t)$  单调递减,  $h(t) > h(1) = 0$ , 得证。

(二) 选考题: 共10分. 请考生在第22、23题中任选一道作答. 如果多做, 则按所做的第一道题积分. 作答时请用2B铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.





## 22 (本小题 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知点  $P$  是曲线  $C_1: (x-2)^2 + y^2 = 4$  上的动点, 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 以极点  $O$  为中心, 将点  $P$  逆时针旋转  $90^\circ$  得到点  $Q$ , 设点  $Q$  的轨迹方程为曲线  $C_2$ .

(I) 求曲线  $C_1, C_2$  的极坐标方程;

(II) 射线  $\theta = \frac{\pi}{3}$  ( $\rho > 0$ ) 与曲线  $C_1, C_2$  分别交于  $A, B$  两点, 定点  $M(2, 0)$ , 求  $\triangle MAB$  的面积.

**考点:** 极坐标与参数方程

**答案:**

(I) 曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho = 4 \sin \theta$ . (II)  $S = 3 - \sqrt{3}$

**解析:**

(I) 曲线  $C_1: (x-2)^2 + y^2 = 4$  上,

根据直角坐标和极坐标转化公式:  $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ , 可得  $\rho = 4 \cos \theta$ .

设  $Q(\rho, \theta)$ , 则  $P(\rho, \theta - \frac{\pi}{2})$ , 则有  $\rho = 4 \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = 4 \sin \theta$

得曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho = 4 \sin \theta$ .

(II)  $M$  到射线  $\theta = \frac{\pi}{3}$  的距离为  $d = 2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ ,

$|AB| = \rho_B - \rho_A = 4(\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3}) = 2(\sqrt{3} - 1)$

则  $S = \frac{1}{2} |AB| \times d = 3 - \sqrt{3}$

## 23 (本小题 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知实数  $a^2 + 4b^2 = 4$ .

(I) 求证:  $a\sqrt{1+b^2} \leq 2$

(II) 若对任意  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $|x+1| - |x-3| \leq ab$  恒成立, 求实数  $x$  的取值范围.





**考点：**不等式选讲

**答案：** (I) 证明. (II)  $x \leq \frac{1}{2}$

**解析：**

(I) 根据  $a^2 + 4b^2 = 4$ , 可设  $a = 2\cos\theta, b = \sin\theta (\theta \in R)$

$$\text{则 } a\sqrt{1+b^2} = 2\cos\theta\sqrt{1+\sin^2\theta} = 2\sqrt{\cos^2\theta(1+\sin^2\theta)} = 2\sqrt{\cos^2\theta(2-\cos^2\theta)}$$

$$\text{令 } t = \cos^2\theta, \text{ 则 } t \in [0,1], \quad a\sqrt{1+b^2} = 2\sqrt{t(2-t)}$$

在  $t \in [0,1]$  上,  $a\sqrt{1+b^2} = 2\sqrt{t(2-t)}$  的最大值为 2

$$\text{故 } a\sqrt{1+b^2} \leq 2$$

$$(II) \text{ 设 } f(x) = |x+1| - |x-3| \text{ 则 } f(x) = \begin{cases} -4 & x < -1 \\ 2x-2 & -1 \leq x \leq 3 \\ 4 & x > 3 \end{cases}$$

由 (I)  $ab = 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$ , 最小取 -1

由  $|x+1| - |x-3| \leq ab$  恒成立可得  $|x+1| - |x-3| \leq -1$

故  $x$  的取值范围是  $x \leq \frac{1}{2}$

