山西大学附中

2018～2019 学年高二第一学期 10 月（总第二次）模块诊断

数 学 试 题

考试时间：110 分钟 满分：150 分 命题人：燕翔 审核人：高二数学组

一、**选择题**（本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中只有一个选项符合题目要求）

1. 一个几何体有 6 个顶点，则这个几何体不可能是（ ）

A. 三棱柱 B. 三棱台 C.五棱锥 D. 四面体

【答案】D

【难度】易

【考点】简单多面体

2. 下列说法正确的个数（ ）

①空间中三条直线交于一点，则这三条直线共面

②梯形可以确定一个平面

③如果一个角的两边分别平行于另一个角的两边，则这两个角相等

④ $A\in\alpha$，$A\in\beta$ 且 $\alpha\cap\beta=l$，则 A 在 l 上

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】B

【难度】易

【考点】空间基本定理

【解析】②正确，③应该是相等或互补.

3. 已知 m，n 表示两条不同直线，α 表示平面，则下列说法正确的是（ ）

A. 若 $m/\!/\alpha$，$n/\!/\alpha$，则 $m/\!/n$ B. 若 $m\perp\alpha$，$n\subset\alpha$，则 $m\perp n$

C. 若 $m\perp\alpha$，$m\perp n$，则 $n/\!/\alpha$ D. 若 $m/\!/\alpha$，$m\perp n$，则 $n\perp\alpha$

【答案】B

【难度】易

【考点】空间位置关系

4. 下列关于简单几何体的说法中正确的是（ ）

①有两个面互相平行，其余各面都是平行四边形的多面体是棱柱

②有一个面是多边形，其余各面都是三角形的几何体是棱锥

③在斜二测画法中，与坐标轴不平行的线段的长度在直观图中有可能保持不变

④有两个底面平行且相似，其余各面都是梯形的多面体是棱台

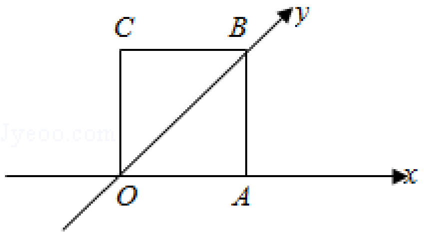
⑤空间中到定点的距离等于定长的所有点的集合是球面

A.③④⑤ B. ③⑤ C. ④⑤ D. ①②⑤

【答案】B
【难度】中
【考点】几何体的结构特征

5. 如图，正方形 $OABC$ 的边长为 1，它是水平放置的一个平面图形的直观图，则原图形的周长是（　　）

A. 8　　B. 6　　C. $2\left(1+\sqrt{3}\right)$　　D. $2\left(1+\sqrt{2}\right)$



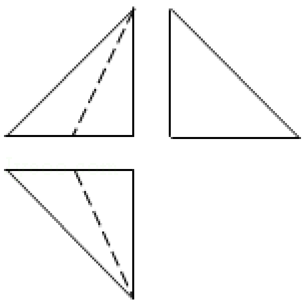
【答案】A
【难度】易
【考点】斜二测画法

6. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，M 为 A_1B_1 的中点，则异面直线 AM 与 B_1C 所成角的余弦值为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

【答案】A
【难度】中
【考点】异面直线所成角

7. 如图是一个四面体的三视图，这个三视图均是腰长为 2 的等腰直角三角形，正视图和俯视图中的虚线是三角形的中线，则该四面体的体积为（　　）



A. $\dfrac{2}{3}$　　B. $\dfrac{4}{3}$　　C. $\dfrac{8}{3}$　　D. 2

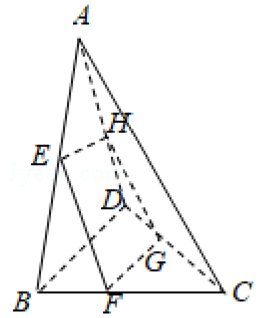
【答案】A
【难度】中
【考点】三视图，四面体的体积的求法

8. 在△ABC 中，$AB=BC=2$，$\angle ACB=120°$，若△ABC 绕直线 BC 旋转一周，则所形成的几何体的表面积是（　　）

A. $\left(6+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\pi$　　B. $\dfrac{3}{2}\pi$　　C. $\left(6+2\sqrt{3}\right)\pi$　　D. $\left(6+\sqrt{3}\right)\pi$

【答案】C
【难度】易
【考点】几何体计算
【解析】表面积为两个圆锥的侧面积之和.

9. 如图，在空间四边形 $ABCD$ 中，点 E、H 分别是边 AB、AD 的中点，F、G 分别是边 BC、CD 上的点，$\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$，则（　　）



A．EF 与 GH 互相平行

B．EF 与 GH 异面

C．EF 与 GH 的交点 M 可能在直线 AC 上，也可能不在直线 AC 上

D．EF 与 GH 的交点 M 一定在直线 AC 上

【答案】D
【难度】中
【考点】空间基本定理
【解析】两个平面的公共点一定在这两个平面的交线上

10. 在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，侧棱长为 $\sqrt{2}$，底面三角形的边长为 1，则 BC_1 与侧面 ACC_1A_1 所成角的大小为（　　）

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

【答案】A
【难度】易
【考点】直线与平面所成角计算

11. 在正三棱锥 $P-ABC$ 中，三条侧棱两两垂直且侧棱长为 1，则点 P 到平面 ABC 的距离为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

【答案】C
【难度】易
【考点】点面距离

12. 已知矩形 $ABCD$，$AB=1$，$BC=\sqrt{2}$．将△ABD 沿矩形的对角线 BD 所在的直线进行翻折，则在翻折过程中（　　）

A．存在某个位置，使得直线 AC 与直线 BD 垂直

B．存在某个位置，使得直线 AB 与直线 CD 垂直

C．存在某个位置，使得直线 AD 与直线 BC 垂直

D．对任意位置，三对直线“AC 与 BD”，“AB 与 CD”，“AD 与 BC”均不垂直

【答案】B

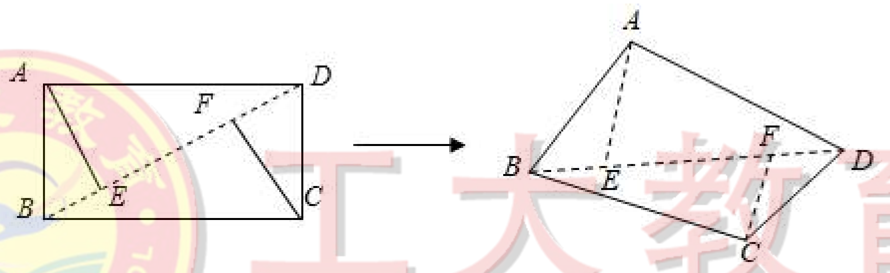
【难度】难

【考点】空间的线面和面面的垂直关系

【解析】如图，$AE\perp BD$，$CF\perp BD$，依题意，$AB=1$，$BC=\sqrt{2}$，$AE=CF=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$BE=EF=FD=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

A，若存在某个位置，使得直线 AC 与直线 BD 垂直，则∵$BD\perp AE$，∴$BD\perp$平面 AEC，从而 $BD\perp EC$，这与已知矛盾，排除 A；

B，



若存在某个位置，使得直线 AB 与直线 CD 垂直，则 $CD\perp$平面 ABC，平面 $ABC\perp$平面 BCD

取 BC 中点 M，连接 ME，则 $ME\perp BD$，∴$\angle AEM$ 就是二面角 $A-BD-C$ 的平面角，此角显然存在，即当 A 在底面上的射影位于 BC 的中点时，直线 AB 与直线 CD 垂直，故 B 正确；

C，若存在某个位置，使得直线 AD 与直线 BC 垂直，则 $BC\perp$平面 ACD，从而平面 $ACD\perp$平面 BCD，即 A 在底面 BCD 上的射影应位于线段 CD 上，这是不可能的，排除 C

D，由上所述，可排除 D

故选：B．

二、**填空题**（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知长方体的长宽高分别为 1，2，3，则其外接球的表面积为____________．

【答案】14π

【难度】易

【考点】长方体与其外接球的关系

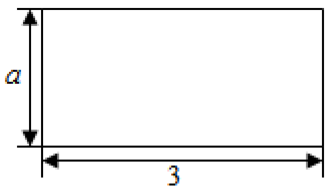
14. 已知半径为 1 的球与正三棱柱的六个面都相切，则三棱柱的体积为____________．

【答案】$6\sqrt{3}$

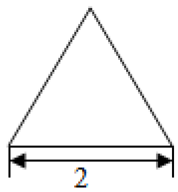
【难度】易

【考点】棱柱与内切球的关系

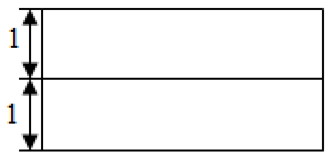
15. 如图是一个几何体的三视图，若它的体积是 3，则 a=____________.



正视图



俯视图



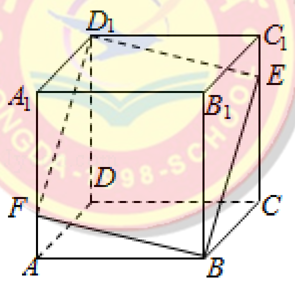
俯视图

【答案】1

【难度】易

【考点】三视图

16. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是棱 CC_1 上的一个动点，平面 BED_1 交棱 AA_1 于点 F. 下列命题正确的为__________.



③ 存在点 E，使得 B_1D⊥平面 BED_1F

④ 对于任意的点 E，四棱锥 B_1-BED_1F 的体积均不变

【答案】①②④

【难度】难

【考点】直线与平面的平行，垂直关系及棱锥的体积计算

【解析】对①，当 E 为 CC_1 的中点时，则 F 也为 AA_1 的中点，∴EF∥A_1C_1，∴A_1C_1∥平面 BED_1F；故①为真命题；

对②，∵BD_1⊥平面 A_1C_1D，BD_1⊂平面 BED_1F，∴平面 A_1C_1D⊥平面 BED_1F，故②是真命题；

对③，假设 B_1D⊥平面 BED_1F，则 B_1D 在平面 BCC_1B_1 和平面 ABB_1A_1 上的射影 B_1C，B_1A 分别与 BE，BF 垂直，

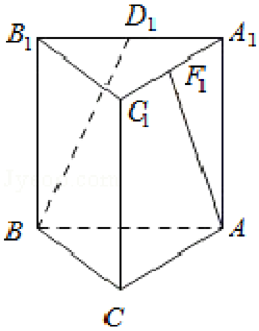
可得 E 与 C_1 重合，F 与 A_1 重合，而 B，A_1，C_1，D_1 四点不共面，∴不存在这样的点 E，故③为假

命题；

对④，∵ $V_{B_1-BED_1F}=V_{E-BB_1D_1}+V_{F-BB_1D_1}$，∵ CC_1 // AA_1 // 平面 BB_1D_1，∴四棱锥 B_1-BED_1F 的体积为定值，故④是真命题

三、**解答题**（本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. （10 分）如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle CAB=\dfrac{\pi}{2}$，$D_1$、$F_1$ 分别是 A_1B_1、A_1C_1 的中点，若 $BA=CA=AA_1$，求异面直线 BD_1，AF_1 所成角的余弦值.



【答案】$\dfrac{4}{5}$

【难度】易

【考点】异面直线所成的角

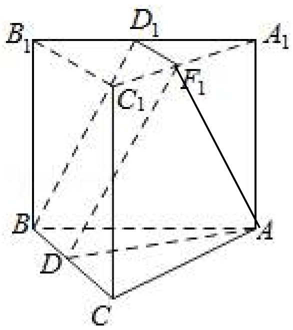
【解析】取 BC 的中点 D，连接 D_1F_1，F_1D

∴ D_1B // DF_1

∴ $\angle DF_1A$ 就是 BD_1 与 AF_1 所成角

设 $BA=CA=AA_1=2$，则 $AD=\sqrt{2}$，$AF_1=\sqrt{5}$，$DF_1=\sqrt{5}$

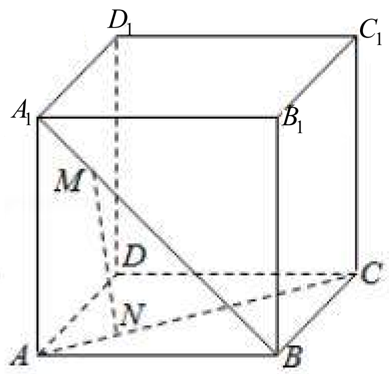
在 $\triangle DF_1A$ 中，$\cos\angle DF_1A=\dfrac{4}{5}$，



18. （12 分）如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3，M，N 分别为 A_1B，AC 上的点，且 $A_1M=AN=\sqrt{2}$．

（1）求证：MN∥平面 BB_1C_1C．

（2）求 MN 的长．



【答案】（1）见解析；（2）$\sqrt{5}$．

【难度】易

【考点】线面平行的证明，线段长的最小值的求法

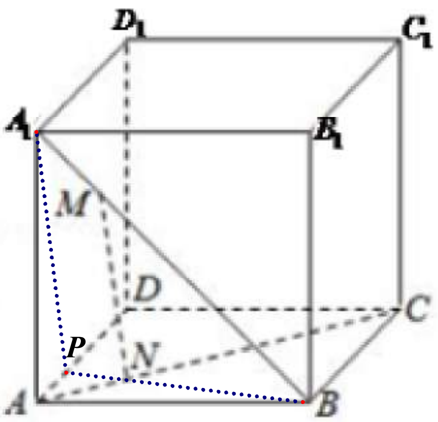
【解析】（1）连接 BN 并延长交 AD 于 P，连接 A_1P，

$\because AP\parallel BC$，$\therefore \frac{PN}{NB}=\frac{AN}{NC}$，又∵ $AN=A_1M$，$AC=A_1B$，∴ $\frac{AN}{NC}=\frac{A_1M}{MB}$，∴ $\frac{PN}{NB}=\frac{A_1M}{MB}$，∴ $MN\parallel A_1P$，

又∵ $A_1P\subset$ 面 A_1ADD_1，∴ $MN\parallel$ 面 A_1ADD_1，∵ 面 $A_1ADD_1\parallel$ 面 BB_1C_1C，$\therefore MN\parallel$ 面 BB_1C_1C

（2）由题可知 $A_1M=AN=\sqrt{2}$，棱长为 3，$\therefore AC=A_1B=3\sqrt{2}$，

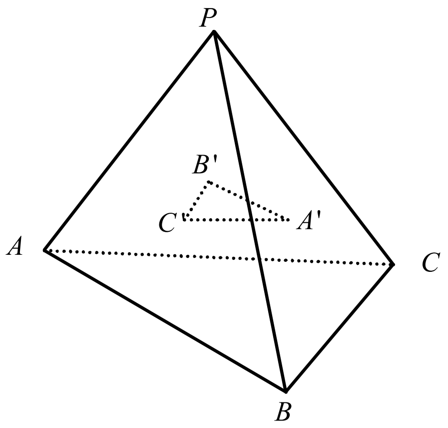
∴ $\frac{A_1M}{MB}=\frac{PN}{NB}=\frac{1}{2}$，∴ $\frac{AP}{BC}=\frac{1}{2}$，$AP=\frac{3}{2}$，$\therefore A_1P=\sqrt{9+\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{5}$，$MN=\frac{2}{3}AP=\sqrt{5}$．



19. （12 分）如图，P 是△ABC 所在平面外一点，A'，B'，C' 分别是△PBC，△PCA，△PAB 的重心．

（Ⅰ）求证：平面 $A'B'C'$ // 平面 ABC；

（Ⅱ）求△$A'B'C'$ 与△ABC 的面积比．



【答案】(Ⅰ) 见解析；(Ⅱ) $\frac{1}{9}$．

【难度】中

【考点】面面平行的证明，相似

【解析】(Ⅰ) 连接并延长 PA'，PB'，PC' 交 BC、AC、AB 于点 F、D、E，连结 DE、EF、FD，由题可知

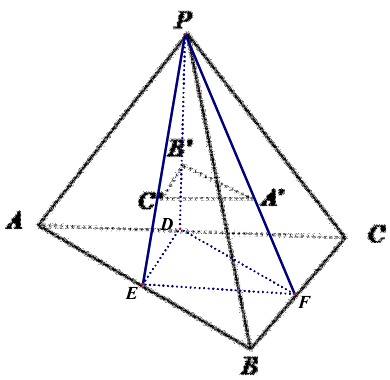
∵ A'，B'，C' 为重心，∴ F、D、E 分别为 BC、AC、AB 中点，且 $\frac{PA'}{PF}=\frac{PB'}{PD}=\frac{PC'}{PE}=\frac{2}{3}$，

∴ $A'B'$ // DE，$A'C'$ // EF，∵ $A'B' \subset$ 面 $A'B'C'$，$A'C' \subset$ 面 $A'B'C'$，$DF \subset$ 面 ABC，$EF \subset$ 面 ABC，

∴面 $A'B'C'$ // 面 ABC

(Ⅱ) 由 (Ⅰ) 可知 $A'C'$ // EF，$A'C'=\frac{2}{3}EF$，$EF=\frac{1}{2}AC$，EF // AC，∴ $A'C'=\frac{1}{3}AC$，

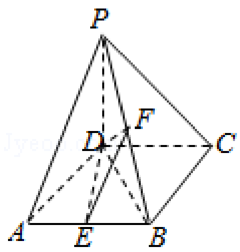
同理，$A'B'=\frac{1}{3}AB$，$B'C'=\frac{1}{3}BC$，∴△$A'B'C' \backsim$ △ABC，$\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{9}$．



20. （12 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为正方形，$PD=DC$，E、F 分别是 AB、PB 的中点．

（1）求证：$EF\perp CD$；

（2）求 DB 与平面 DEF 所成角的正弦值．



【答案】（1）见解析；（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$．

【难度】难

【考点】直线与直线的垂直的证明，直线与平面所成角的求法

【解析】（1）证明：$\because CD\perp PD$，$CD\perp AD$，$\therefore CD\perp$面 PAD，$PA\subset$面 PAD，$\therefore CD\perp PA$，

又$\because E$、F 分别为 AB、PB 中点，$\therefore PA /\!/ EF$，$\therefore CD\perp EF$

（2）设 $AB=2$，则 $BD=2\sqrt{2}$，$PB=2\sqrt{3}$，$DE=\sqrt{5}$，$DF=\dfrac{1}{2}PB=\sqrt{3}$，$PA=2\sqrt{2}$，

在$\triangle EFD$ 中，$DF=\sqrt{3}$，$DE=\sqrt{5}$，$EF=\dfrac{1}{2}PA=\sqrt{2}$，$\therefore DF\perp EF$，$\therefore S_{\triangle DEF}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

F 到面 DEF 距离为 $\dfrac{1}{2}PD=1$，$\therefore V_{F-EDB}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle EDB}\cdot\dfrac{1}{2}PD=\dfrac{1}{3}$

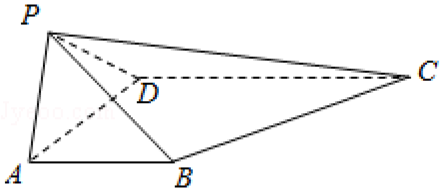
$V_{F-EDB}=V_{B-EDF}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle EDF}\cdot h\ \therefore h=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

设 BD 与面 EDF 夹角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{h}{BD}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$．

21. （12 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA=PD=2$，$\angle APD=90°$，底面为梯形，$AB\parallel CD$，$CD=2AB$ 且 $AB\perp$平面 PAD.

（1）证明：平面 $PAB\perp$平面 PCD；

（2）当异面直线 PA 与 BC 所成角为 60°时，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



【答案】（1）见解析；（2）$4\sqrt{2}$.

【难度】中

【考点】面面垂直的判定，多面体的体积计算

【解析】（1）因为 $\angle APD=90°$，所以 $AP\perp PD$，

因为 $AB\perp$平面 PAD，$PA\subset$平面 PCD，所以 $AB\perp PA$，

因为 $AB\parallel CD$，所以 $PA\perp CD$.

因为 $CD\cap PD=D$，所以 $AP\perp$平面 PCD，

又 $AP\subset$平面 PAB，所以平面 $PAB\perp$平面 PCD.

（2）取 CD 的中点 M，连接 PM，AM，

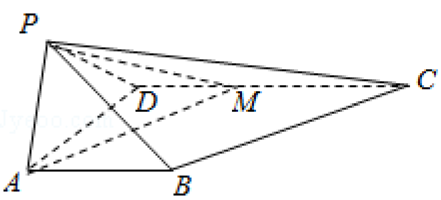
$\therefore CD\parallel AB$，$CD=2AB$，$\therefore CE\parallel AB$，$CE=AB$，$\therefore AE\parallel BC$，$AE=BC$，面 $PAD\perp$面 $ABCD$

$\therefore \angle PAE=60°$，$\therefore P$ 到 $ABCD$ 距离 $h=\frac{1}{2}AD=\sqrt{2}$，

设 $AB=x$，$\because PA=PD=2$，$AD=2\sqrt{2}$，$\because DE\parallel AB$，$DE\perp$面 PAD，$\therefore ED\perp AD$，$ED\perp PD$，

$\therefore AE=\sqrt{8+x^2}$ ，$DE=\sqrt{4+x^2}$,$\cos\angle PAD=\cos 60°=\frac{4+8+x^2-4-x^2}{4\cdot\sqrt{8+x^2}}$，解得 $x=2\sqrt{2}$.

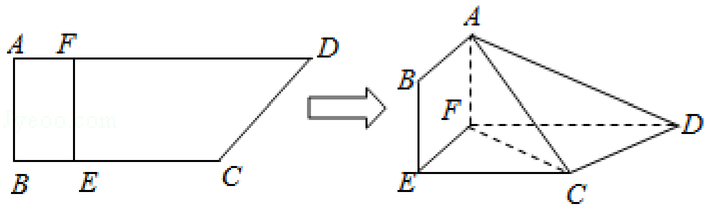
$\therefore V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot h=4\sqrt{2}$



22. （12 分）如图，四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD$，$AD\parallel BC$，$AD=6$，$BC=2AB=4$，E、F 分别在 BC、AD 上，$EF\parallel AB$，现将四边形 $ABCD$ 沿 EF 折起，使 $BE\perp EC$.

（1）若 $BE=1$，在折叠后的线段 AD 上是否存在一点 P，使得 $CP\parallel$ 平面 $ABEF$？若存在，求出 $\dfrac{AP}{PD}$ 的值；若不存在，说明理由.

（2）求三棱锥 $A-CDF$ 的体积的最大值，并求此时点 F 到平面 ACD 的距离.



【答案】（Ⅰ）存在，$\dfrac{AP}{PD}=\dfrac{3}{2}$；（Ⅱ）$V_{A-CDF}$ 最大为 3，此时 F 到平面 ADC 的距离为 $\sqrt{3}$.

【难度】难

【考点】线面平行的判定与性质定理、平行四边形的判定与性质定理、三棱锥的体积计算公式

【解析】(1) AD 上存在一点 P，使得 $CP\parallel$ 平面 $ABEF$，此时 $\dfrac{AP}{PD}=\dfrac{3}{2}$.

证明：当 $\dfrac{AP}{PD}=\dfrac{3}{2}$ 时，$\dfrac{AP}{AD}=\dfrac{3}{5}$，

过点 P 作 $MP\parallel FD$ 交 AF 于点 M，连接 EM，则有 $\dfrac{MP}{FD}=\dfrac{AP}{AD}=\dfrac{3}{5}$，

∵$BE=1$，可得 $FD=5$，故 $MP=3$，又 $EC=3$，$MP\parallel FD\parallel EC$，

故有 $MP=EC$，$MP\parallel EC$，故四边形 $MPEC$ 为平行四边形，∴$CP\parallel$ 平面 $ABEF$ 成立；

(2) 设 $BE=x$，∴$AF=x$（$0<x\le 4$），$FD=6-x$，

故 $V_{A-CDF}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot(6-x)\cdot x=\dfrac{1}{3}\left(-x^2+6x\right)$.

∴当 $x=3$ 时，V_{A-CDF} 有最大值，且最大值为 3，此时 $EC=1$，$AF=3$，$FD=3$，$DC=2\sqrt{2}$，

在△ACD 中，由余弦定理得 $\cos\angle ADC=\dfrac{AD^2+DC^2-AC^2}{2AD\cdot DC}=\dfrac{18+8-14}{2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

∴ $\sin\angle ADC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$S_{\triangle ADC}=\dfrac{1}{2}\cdot DC\cdot DA\cdot\sin\angle ADC=3\sqrt{3}$，

设点 F 到平面 ADC 的距离为 h，由于 $V_{A-CDF}=V_{F-ACD}$，即 $3=\dfrac{1}{3}\cdot h\cdot S_{ADC}$，

∴ $h=\sqrt{3}$，即点 F 到平面 ADC 的距离为 $\sqrt{3}$.