# 太原市 2018-2019 学年第一学期高二年级期末考试

## 数学试卷（理科）

（答题时间 90 分钟　满分 100 分）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

1. 椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的焦距为（　　）

A. 4　　B. 5

C. 6　　D. 9

【答案】C

【难度】易

【考点】椭圆基本量

2. 命题：“ $\forall x\in\mathbf{R},3^x>0$ ” 的否定是（　　）

A. $\exists x_0\in\mathbf{R},3^{x_0}\le 0$　　B. $\exists x_0\in\mathbf{R},3^{x_0}<0$

C. $\forall x\in\mathbf{R},3^x\le 0$　　D. $\forall x\in\mathbf{R},3^x<0$

【答案】A

【难度】易

【考点】命题的否定

3. 在空间直角坐标系中，已知点 $A(1,0,1)$， $B(3,2,1)$，则线段 $AB$ 的中点坐标是（　　）

A. $(1,1,1)$　　B. $(2,1,1)$

C. $(1,1,2)$　　D. $(1,2,3)$

【答案】B

【难度】易

【考点】空间中点坐标公式

4. 下列命题是真命题的是（　　）

A. $4\in\{2,3\}$ 且 $2\in\{2,3\}$　　B. 1 是奇数且 1 是素数

C. 2 是偶数或 3 不是素数　　D. 周长或面积相等的两个三角形全等

【答案】C

【难度】易

【考点】命题真假判断

5. 抛物线 $x^2=\frac{1}{2}y$ 的焦点到准线的距离是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

【答案】D

【难度】易

【考点】抛物线的基本量

6. 已知空间直角坐标系中点 $P(2,1,3)$，若在 $z$ 轴上取一点 $Q$，使得$|PQ|$最小，则点 Q 的坐标为（ ）

A. $(0,0,1)$　　B. $(0,0,2)$　　C. $(0,0,3)$　　D. $(0,1,0)$

【答案】C
【难度】中
【考点】空间直角坐标系

7. “$mn<0$”是“方程 $mx^2-ny^2=1$ 表示椭圆”的（ ）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】B
【难度】椭圆定义、充分必要条件的判定
【考点】

8. 若直线 $l$ 的方向向量为 $\mathbf{m}$，平面 $\alpha$ 的法向量为 $\mathbf{n}$，则可能使 $l // \alpha$ 的是（ ）

A． $\mathbf{m}=(1,0,0),\mathbf{n}=(-2,0,0)$　　B． $\mathbf{m}=(1,3,5),\mathbf{n}=(1,0,1)$

C． $\mathbf{m}=(0,2,1),\mathbf{n}=(-1,0,-1)$　　D． $\mathbf{m}=(1,-1,3),\mathbf{n}=(0,3,1)$

【答案】D
【难度】中
【考点】向量法判定线面平行

9. 已知 $A(1,0,0)$， $B(0,1,0)$， $C(0,0,1)$ 三点，以 $\mathbf{n}=(1,1,1)$ 为方向向量的直线与平面 $ABC$ 的关系是（ ）

A. 垂直　　B.不垂直　　C. 平行　　D. 以上都有可能

【答案】A
【难度】中
【考点】向量法判定线面垂直

10. 已知双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右顶点为 $A$，抛物线 $C:y^2=8ax$ 的焦点为 $F$ .若在 $E$ 的渐近线上存在点 $P$，使得 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{FP}$，则曲线 $E$ 的离心率的取值范围是（ ）

A. $(1,2)$　　B. $\left(1,\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right]$　　C. $\left[\dfrac{3\sqrt{2}}{4},+\infty\right)$　　D. $(2,+\infty)$

【答案】B
【难度】中
【考点】双曲线离心率范围

11. 若 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(0,0,\sqrt{5})$, $B\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},\sqrt{5}\right)$, $C(-1,0,\sqrt{5})$，则角 $A$ 的大小为（ ）

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

【答案】A
【难度】中
【考点】空间向量应用

【解析】$\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right),\left|\overrightarrow{AB}\right|=1$

$\overrightarrow{AC}=\left(-1,0,0\right),\left|\overrightarrow{AC}\right|=1$

$\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2},\angle A=\frac{\pi}{6}$

12. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 $P$ 是平面 $ABCD$ 内的动点，若点 $P$ 到直线 $A_1D_1$ 的距离等于点 $P$ 到直线 $CD$ 的距离，则动点 $P$ 的轨迹所在的曲线是（　　）

A .抛物线　　B. 双曲线　　C. 椭圆　　D. 直线

【答案】B

【难度】难

【考点】轨迹问题

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

13. 双曲线 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$ 的实轴长为________.

【答案】$2\sqrt{3}$

【难度】易

【考点】双曲线基本量

14. 命题“如果 $x+y>3$，那么 $x>1$ 且 $y>2$”的逆否命题是______________________.

【答案】“如果 $x\le 1$ 或 $y\le 2$，那么 $x+y\le 3$”

【难度】易

【考点】逆否命题

15. 已知双曲线 $C$ 与椭圆 $E:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ 有共同的焦点，它们的离心率之和为 $\frac{14}{5}$，则双曲线 $C$ 的标准方程是____________.

【答案】$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$

【难度】中

【考点】双曲线标准方程

16. 空间四点 $A,B,C,D$ 满足 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=3,\left|\overrightarrow{BC}\right|=7,\left|\overrightarrow{CD}\right|=11,\left|\overrightarrow{DA}\right|=9$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$____________.

【答案】0

【难度】难

【考点】空间向量运算

## 三、解答题（本大题共 5 小题，共计 52 分）

17. （10 分）命题 $p$：曲线 $y=x^2+(2m-3)x-1$ 与 $x$ 轴相交于不同的两个点；命题 $q$：椭圆 $\dfrac{x^2}{m^2+1}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的焦点在 $y$ 轴上.

(1)判断命题 $p$ 的否定的真假；

(2)若“$p$ 且 $q$”是假命题，“$p$ 或 $q$”是真命题，求实数 $m$ 的取值范围.

【答案】（1）假命题（2） $m\in[1,+\infty)\cup(-\infty,-1]$

【考点】命题的真假

【难度】简单

【解析】（1）对于命题 p 中的二次函数， $\Delta=(2m-3)^2+4>0$，

因此该二次函数与 x 轴有两个交点， 命题 p 为真命题。则命题 p 的否定为假命题。

（2）由题意可知，命题 q 为假命题

若 q 为真命题， $m^2+1<2$， 得 $-1<m<1$

则当 q 为假命题时， $m\in[1,+\infty)\cup(-\infty,-1]$

18. （10 分）已知抛物线 $C:y^2=2px$ 经过点 $P(4,4)$.

(1)求点抛物线 $C$ 方程；

(2)若 $A,B$ 为抛物线 $C$ 上不同的两点，且 $AB$ 的中点坐标为 $(2,1)$，求直线 $AB$ 的方程.

【答案】（1） $y^2=4x$　　（2） $y=2x-3$

【考点】抛物线

【难度】中等

【解析】（1）将点 $P(4,4)$ 代入抛物线解析式，解得 $p=2$

则抛物线解析式为 $y^2=4x$

（2）若直线 $AB$ 与 $x$ 轴垂直，则 $AB$ 中点纵坐标为 0，显然不成立

设直线 $AB$ 解析式为 $y=kx+b$

联立得 $k^2x^2+(2kb-4)x+b^2=0$

由韦达定理 $x_1+x_2=-\dfrac{2kb-4}{k^2}=4$

则 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2b=4k+2b=2$

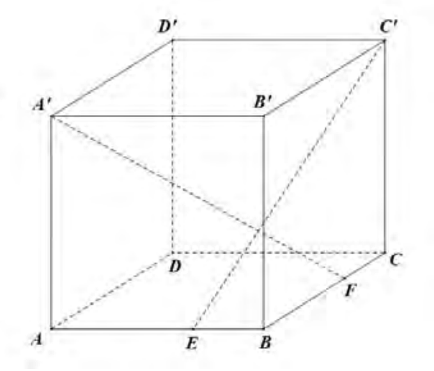
解得 $k=2$， $b=-3$

则直线 $AB$ 的解析式为 $y=2x-3$

19. （10 分）如图，在棱长为 $a$ 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$E$，$F$ 分别是棱 $AB,BC$ 上的点，且 $\frac{AB}{EB}=\frac{BC}{FC}=3$．

(1)求线段 $A_1F$ 的长；

(2)求异面直线 $A_1F$ 与 $C_1E$ 所成的角．




【答案】（1）$\frac{\sqrt{22}}{3}a$　　（2）$\frac{\pi}{2}$

【考点】立体几何中异面直线夹角

【难度】中等

【解析】以点 $D$ 为坐标原点，$DA$，$DC$，$DD_1$ 为 x 轴，$y$ 轴，$z$ 轴建立空间直角坐标系

由题可知 $A_1(a,0,0)$，$C_1(0,a,a)$，$B(a,a,0)$，$E\left(a,\frac{2}{3}a,0\right)$，$F\left(\frac{a}{3},a,0\right)$

则 $\overrightarrow{A_1F}=\left(-\frac{2}{3}a,a,-a\right)$，$\overrightarrow{C_1E}=\left(a,-\frac{1}{3}a,-a\right)$

（1）$\left|\overrightarrow{A_1F}\right|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}a\right)^2+a^2+a^2}=\frac{\sqrt{22}}{3}a$

（2）设 $A_1F$ 与 $C_1E$ 所成的夹角为 $\theta$

则 $\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{A_1F}\cdot\overrightarrow{C_1E}}{\left|\overrightarrow{A_1F}\right|\cdot\left|\overrightarrow{C_1E}\right|}\right|=0$

所以 $A_1F$ 与 $C_1E$ 所成的夹角为 $\frac{\pi}{2}$

20. （10 分）**说明：请在（A），（B）两个小题中任选一题解答**

**（A）** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的两个焦点别为 $F_1$， $F_2$，焦距为 2，过 $(1,0)$ 作直线与椭圆交于 $A$、$B$ 两点，连接 $AF_1,BF_1$，且 $\triangle ABF_1$ 的周长为 $4\sqrt{2}$ .

(1)椭圆 $C$ 的标准方程；

(2)若直线 $AB$ 的斜率为 1，且 $\dfrac{|BF_2|}{|AF_2|}=\lambda$，求 $\lambda$ 的值.

**（B）** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的两个焦点别为 $F_1$， $F_2$，焦距为 2，过 $(1,0)$ 作直线与椭圆交于 $A$、$B$ 两点，连接 $AF_1,BF_1$，且 $\triangle ABF_1$ 的周长为 $4\sqrt{2}$ .

(1)椭圆 $C$ 的标准方程；

(2)若 $|AB|=4|F_2A|$，求直线 $AB$ 的方程.

【答案】（1） $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ （2）（A）3 或 $\dfrac{1}{3}$ （B） $AB:x=y+1(x-y-1=0)$

【考点】椭圆

【难度】中等

【解析】（1）由题可知， $2c=2$，则 $c=1$，∴ $F_2(1,0)$

因为△ $ABF_1$ 周长为 $4a=4\sqrt{2}, a=\sqrt{2}$

$b^2=a^2-c^2=1$，则椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$

（2）（A）由题可知直线 $AB$ 解析式为： $y=x-1$

联立椭圆方程得 $\dfrac{3}{2}x^2-2x=0$ 解得 $x_1=0$ $x_2=\dfrac{4}{3}$

当 $A(0,-1)\mathrm{B}\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3}\right)$时，可得 $\dfrac{|BF_2|}{|AF_2|}=\dfrac{1}{3}$

当 $A\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3}\right)B(0,-1)$ 时，可得 $\dfrac{|BF_2|}{|AF_2|}=3$

综上， $\lambda=3$ 或 $\dfrac{1}{3}$

（B）当 $AB$ 斜率为 0 时， $|AB|=2\sqrt{2},|AF_2|=\sqrt{2}\pm1$,不符合题意舍

∴设 $AB:x=ty+1$，与 C 联立得 $\left(\dfrac{t^2}{2}+1\right)y^2+ty-\dfrac{1}{2}=0$

$|y_A|=\frac{1}{4}|y_A-y_B|=\frac{\sqrt{2t^2+2}}{2t^2+4}$

解得 $t^2=1$ 或 $-\frac{9}{7}$ (舍)

经检验 $t=1$

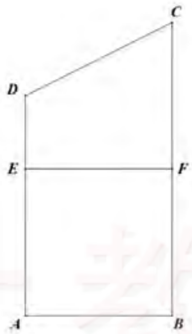
$AB: x=y+1(x-y-1=0)$

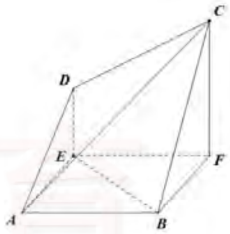
21. （12 分）**说明：请在（A），（B）两个小题中任选一题解答**

**（A）**已知四边形 $ABCD$ 为直角梯形，$AD/\!/BC$，$AB\perp BC$，$BC=2AB=4$，$AD=3$，过 $BC$ 的中点 $F$ 作 $EF/\!/AB$，交 $AD$ 于点 $E$，沿 $EF$ 将四边形 $EFCD$ 折起，连接 $AD,BC,AC$．

(1)求证：$BE/\!/$ 平面$ACD$；

(2)若 平面$CDEF\perp$平面$ABEF$，求二面角 $B-AC-D$ 的大小．

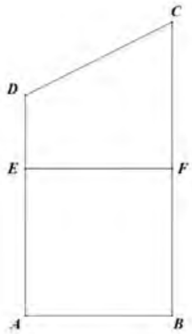


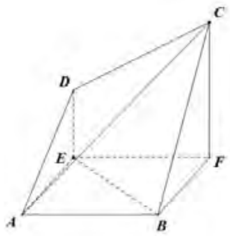



**（B）**已知四边形 $ABCD$ 为直角梯形，$AD/\!/BC$，$AB\perp BC$，$BC=2AB=4$，$AD=3$，过 $BC$ 的中点 $F$ 作 $EF/\!/AB$，交 $AD$ 于点 $E$，沿 $EF$ 将四边形 $EFCD$ 折起，连接 $AD,BC,AC$．

(1)求证：$BE/\!/$ 平面$ACD$；

(2)若 平面$CDEF\perp$平面$ABEF$，在线段 $BC$ 上是否存在 $P$，使得直线 $FP$ 与平面 $ACD$ 所成角为 30°，并说明理由．






【答案】(1)见解析；(2)A

【难度】难

【考点】空间向量的应用

【解析】(1)连接 $AF$ 交 $BE$ 于 $O$，取 $CA$ 中点 $M$，连 $OM$，$DM$

由题意可知 AM=MC，AO=OF

$\therefore OM // CF$，$OM=\frac{1}{2}CF$

由题意知 $DE // CF$，$DE=1$，$CF=2$

$\therefore DE=\frac{1}{2}CF$，$DE // CF$，$DE=CF$

∴四边形 $DMOE$ 为平行四边形

$\therefore DM // DE$，又∵ $DM \subset$ 面$ADC$， $EO \not\subset$ 面$ADC$

$\therefore BE //$ 平面$ACD$

(2)以 $E$ 点为原点，$EA$，$EF$，$ED$ 为 $x$，$y$，$z$ 轴建系

由题意知 $A(2,0,0)$，$D(0,0,1)$，$C(0,2,2)$，$B(2,2,0)$

（A）$\therefore \overrightarrow{AD}=(-2,0,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,2,2)$，$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$

设面 $ADC$ 与面 $ABC$ 法向量为 $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$

由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ 得 $\overrightarrow{n_1}=(1,-1,2)$，同理 $\overrightarrow{n_2}=(1,0,1)$

$\therefore \cos\left\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴二面角 $B-AC-D$ 的大小为 $\frac{5\pi}{6}$

（B）设 $P(x,2,2-x)$ $\therefore \overrightarrow{FP}=(x,0,2-x)$ $(0\le x\le 2)$

设面 $ACD$ 的法向量为 $\vec{n}$

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ 得 $\vec{n}=(1,-1,2)$

∵$FP$ 与面 $ACD$ 所成的角为 $30°$

$\therefore \left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{FP}}{|\vec{n}|\left|\overrightarrow{FP}\right|}\right|=\cos 60°$，即 $\frac{|x+4-2x|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{x^2+(2-x)^2}}=\frac{1}{2}$，解得 $x=\frac{\sqrt{21}-1}{2}$

$\therefore P\left(\frac{\sqrt{21}-1}{2},2,\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)$