2018-2019 学年太原市高一下学期期末数学试卷数学试卷

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

1、已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_n=1+\frac{1}{a_{n-1}}\left(n>1,n\in N^*\right)$，则 a_3 =（　　）

A、2　　B、$\frac{3}{2}$　　C、$\frac{5}{3}$　　D、$\frac{8}{5}$

2、已知$a=\sqrt{2}+\sqrt{7}$，$b=\sqrt{3}+\sqrt{6}$，则下列结论正确的是（　　）

A、a=b　　B、a>b　　C、a<b　　D、不能确定

3. 已知集合$A=\{x|(x-3)(x+1)<0\}$，$B=\{x|2x+1>0\}$，则$A\cap B=$（　　）

A.$\left(-3,\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(-3,-\frac{1}{2}\right)$　　C.$\left(\frac{1}{2},3\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{2},3\right)$

4. 在ΔABC中，若$BC=2\sqrt{3},AC=5,\angle C=30^\circ$，则$AB=$（　　）

A.$\sqrt{7}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{19}$　　D. $\sqrt{37-10\sqrt{3}}$

5、已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，若$a_1=1,a_4+a_6=18,$则$S_5=$（　　）

A. 25　　B. 39　　C. 45　　D. 54

6、若$a,b,c\in R$，则下列结论正确的是（　　）

A.若$a>b$，则$ac^2>bc^2$　　B、若$a<b$，则$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

C.若$a>b,c>d$，则$ac>bd$　　D.若$a>b$，则$a-c>b-c$

7、ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，若ΔABC的面积为$\frac{1}{2}a^2t$，则$t=$（　　）

A. $\frac{\sin A\sin B}{\sin C}$　　B. $\frac{\sin A\sin C}{\sin B}$　　C. $\frac{\sin B\sin C}{\sin A}$　　D. $\frac{\sin B\sin C}{\cos A}$

8、设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_1=18,S_2=24$，则$S_4=$（　　）

A. $\frac{76}{3}$　　B. $\frac{79}{3}$　　C. $\frac{80}{3}$　　D. $\frac{82}{3}$

9、三角形的一个角为60°，夹这个角的两边之比为 8:5，则这个三角形的最大角的正弦值为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$　　C. $\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$　　D. $\dfrac{8}{7}$

10、在ΔABC中，若$\dfrac{\sin A}{k}=\dfrac{\sin B}{3}=\dfrac{\sin C}{4}$，则下列结论错误的是（　）

A. 当$k=5$时，ΔABC是直角三角形　　B. 当$k=3$时，ΔABC是锐角三角形

C. 当$k=2$时，ΔABC是钝角三角形　　D. 当$k=1$时，ΔABC是钝角三角形

11、已知正数a,b满足$ab=a+b+3$，则ab的最小值是（　　）

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

12、已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, a_{n+1}\cdot a_n=2^n\left(n\in N^*\right)$，$S_n$是数列$\{a_n\}$的前$n$项和，则（　　　）

A. $a_{2019}=2^{2019}$　　B. $a_{2019}=2^{1010}$　　C. $S_{2019}=2^{1010}-3$　　D. $S_{2019}=2^{1011}-3$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

13、若数列的前4 项分别是$\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{16}$，则它的一个通项公式是_____.

14、锐角ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，若$b=2a\sin B$，则$A=$____

15、《莱茵德纸草书》是世界上最古老的数学著作之一，书中有一道这样的题目:把100个面包分给5个人，使每个人所得成等差数列，且使较大的三份之和的$\dfrac{1}{7}$是较小的两份之和，则最小的1份为______.

16、已知ΔABC中，$BC=2$，$AB=2AC$，则ΔABC面积的最大值为_______

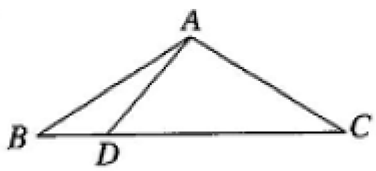
三、解答题（本大题共 5 小题，共 52 分）

17.（本小题满分 10 分）

如图，在ΔABC中，$AB=AC=2, BC=2\sqrt{3}$，点D在BC边上，$\angle ADC=45°$

（1）求$\angle BAC$的度数；

（2）求AD的长度.



18、（本小题满分 10 分）

已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且S_1,S_3,S_2成等差数列，

（1）求数列$\{a_n\}$的公比q；

（2）若$a_1-a_3=6$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

19. （本小题满分 10 分）

如图， 飞机的航线和山顶在同一个铅垂平面内， 已知飞机的高度为海拔 $20250m$ ，速度为 $1000km/h$ ，飞行员在 A 处先看到山顶 C 的俯角为 $18°30'$ ，经过 $150s$ 后又在 B 处看到山顶 C 的俯角为 $81°$

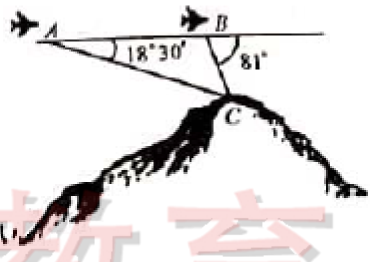
（1）求飞机在 B 处与山顶 C 的距离（精确到 $1m$ ）；

（2）求山顶的海拔高度（精确到 $1m$ ）

参考数据： $\sin 18.5^{\circ} \approx 0.32, \cos 18.5 \approx 0.95$

$\sin 62.5 \approx 0.89, \cos 62.5^{\circ} \approx 0.46$

$\sin 81^{\circ} \approx 0.99, \cos 81^{\circ} \approx 0.16$



20.（本小题满分 10 分）说明：请同学们在（A）、（B）两个小题中任选一题作答.

（A）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=2+a_n$ ，数列 $\{b_n\}$ 满足 $2b_{n+1}-b_n=0$ ，且 $a_1=b_1=1, n\in N^*$

（1）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

（2）求数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

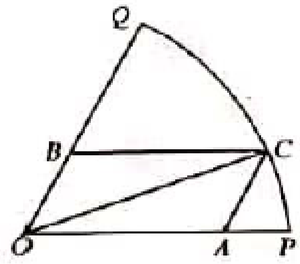
20.（B）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2}{a_n\cdot a_{n+1}}$ ，数列 $\{b_n\}$ 满足 $S_n+b_n=2$ ，其中 S_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1=b_1=1,, n\in N^*$

（1）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式

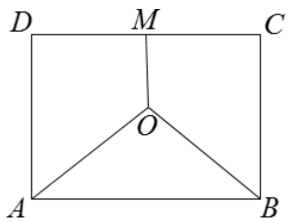
（2）求数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

21.（本小题满分 12 分）说明：请同学们在（A）、（B）两个小题中任选一题作答.

（A）如图，已知OPQ是半径为1,圆心角为$\dfrac{\pi}{3}$的扇形，C是扇形弧上的动点，点A,B分别在半径OP,OQ上，且$OACB$是平行四边形，记$\angle COP=\alpha$，四边形$OACB$的面积为S，问当α取何值时，S最大？S的最大值是多少？



（B）如图，某地三角工厂分别位于边长为 2 的正方形$ABCD$的两个顶点A,B及CD中点M处。为处理这三角工厂的污水，在该正方形区域内（含边界）与A,B等距的点O处建一个污水处理厂，并铺设三条排污管道AO,BO,MO，记铺设管道总长为y千米.



（1）按下列要求建立函数关系式：

（i）设$\angle BAO=\theta$，将y表示成θ的函数;

（ii）设$MO=2-x$，将y表示成x的函数;

（2）请你选用一个函数关系，确定污水厂位置，使铺设管道总长最短.

太原市 2018-2019 学年 高一下学期期末

数学试卷

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

1. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}}(n>1,n\in N^*)$，则$a_3=$（ ）

A. 2　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. $\dfrac{5}{3}$　　D. $\dfrac{8}{5}$

答案：B

2. 已知$a=\sqrt{2}+\sqrt{7},b=\sqrt{3}+\sqrt{6}$，则下列结论正确的是（ ）

A. $a=b$　　B. $a>b$　　C. $a<b$　　D.不能确定

答案：C

3. 已知集合$A=\{x|(x-3)(x+1)<0\}$，$B=\{x|2x+1>0\}$，则$A\cap B=$（ ）

A. $\left(-3,\dfrac{1}{2}\right)$　　B. $\left(-3,-\dfrac{1}{2}\right)$　　C. $\left(\dfrac{1}{2},3\right)$　　D. $\left(-\dfrac{1}{2},3\right)$

答案：D

4. 在ΔABC中，若$BC=2\sqrt{3},AC=5,\angle C=30^\circ$，则$AB=$（ ）

A. $\sqrt{7}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{19}$　　D. $\sqrt{37-10\sqrt{3}}$

答案：A

5. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，若$a_1=1,a_4+a_6=18$, 则$S_5=$（ ）

A. 25　　B. 39　　C. 45　　D. 54

答案：A

6.若$a,b,c\in R$，则下列结论正确的是（ ）

A.若$a>b$，则$ac^2>bc^2$　　B.若$a<b$，则$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$

C.若$a>b,c>d$，则$ac>bd$　　D.若$a>b$，则$a-c>b-c$

答案：D

7. ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，若ΔABC的面积为$\frac{1}{2}a^2t$，则$t=$（　　）

A. $\frac{\sin A\sin B}{\sin C}$　　B. $\frac{\sin A\sin C}{\sin B}$　　C. $\frac{\sin B\sin C}{\sin A}$　　D. $\frac{\sin B\sin C}{\cos A}$

答案：C

8. 设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_1=18,S_2=24$，则$S_4=$（　　）

A. $\frac{76}{3}$　　B. $\frac{79}{3}$　　C. $\frac{80}{3}$　　D. $\frac{82}{3}$

答案：C

9. 三角形的一个角为60°，夹这个角的两边之比为8:5，则这个三角形的最大角的正弦值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{4\sqrt{3}}{7}$　　C. $\frac{5\sqrt{3}}{14}$　　D. $\frac{8}{7}$

答案：B

10. 在ΔABC中，若$\frac{\sin A}{k}=\frac{\sin B}{3}=\frac{\sin C}{4}$，则下列结论错误的是（　）

A. 当$k=5$时，ΔABC是直角三角形　　B. 当$k=3$时，ΔABC是锐角三角形

C. 当$k=2$时，ΔABC是钝角三角形　　D. 当$k=1$时，ΔABC是钝角三角形

答案：D

11. 已知正数a,b满足$ab=a+b+3$，则ab的最小值是（　　）

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

答案：A

12. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}\cdot a_n=2^n\left(n\in N^*\right)$，$S_n$是数列$\{a_n\}$的前$n$项和，则（　　）

A. $a_{2019}=2^{2019}$　　B. $a_{2019}=2^{1010}$　　C. $S_{2019}=2^{1010}-3$　　D. $S_{2019}=2^{1011}-3$

答案：D

二、填空题（本大题共4小题，每小题3分，共12分）

13. 若数列的前4项分别是$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16}$，则它的一个通项公式是________.

答案：$\frac{1}{2^n}$

14. 锐角ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，若$b=2a\sin B$，则$A=$________.

答案：$30°$

15. 《莱茵德纸草书》是世界上最古老的数学著作之一，书中有一道这样的题目:把100个面包分给5个人，使每个人所得成等差数列，且使较大的三份之和的$\frac{1}{7}$是较小的两份之和，则最小的1份为________.

答案：$\frac{5}{3}$

16. 已知ΔABC中，$BC=2$，$AB=2AC$，则ΔABC面积的最大值为 ___

答案：$\frac{4}{3}$

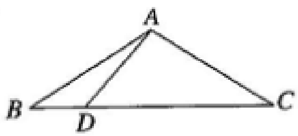
三、解答题（本大题共5小题，共52分）

17.（本小题满分10分）

如图，在ΔABC中，$AB=AC=2,BC=2\sqrt{3}$，点D在BC边上，$\angle ADC=45^{\circ}$

（1）求$\angle BAC$的度数；

（2）求AD的长度.



解析：（1）根据余弦定理：$\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=-\frac{1}{2}$ $\therefore\angle BAC=120^{\circ}$

（2）由（1）可知$\angle ACB=30^{\circ}$

在ΔADC中，依正弦定理：$\frac{AD}{\sin 30^{\circ}}=\frac{AC}{\sin 45^{\circ}}$，$\therefore AD=\sqrt{2}$

18.（本小题满分10分）

已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且S_1,S_3,S_2成等差数列，

（1）求数列$\{a_n\}$的公比q；

（2）若$a_1-a_3=6$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解析：（1）因为S_1,S_3,S_2成等差数列，即$a_1+(a_1+a_2)=2(a_1+a_2+a_3)$

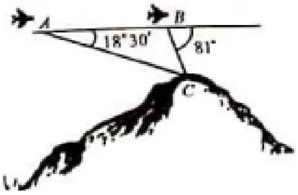
$a_2+2a_3=0\ \therefore q=-\frac{1}{2}$

（2）因为$a_1-a_3=6$，即$a_1(1-q^2)=6$，将$q=-\frac{1}{2}$代入，得$a_1=8$，

所以$a_n=a_1q^{n-1}=8\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(-1)^{n-1}2^{4-n}$，所以通项公式为$a_n=(-1)^{n-1}2^{4-n}$

19. （本小题满分 10 分）

如图，飞机的航线和山顶在同一个铅垂平面内，已知飞机的高度为海拔 $20250m$，速度为 $1000km/h$，飞行员在 A 处先看到山顶 C 的俯角为 $18^\circ 30'$，经过 $150s$ 后又在 B 处看到山顶 C 的俯角为 81°



（1）求飞机在 B 处与山顶 C 的距离（精确到 $1m$）；

（2）求山顶的海拔高度（精确到 $1m$）

参考数据：$\sin 18.5^\circ \approx 0.32, \cos 18.5^\circ \approx 0.95$　　$\sin 62.5^\circ \approx 0.89, \cos 62.5^\circ \approx 0.46$

$\sin 81^\circ \approx 0.99, \cos 81^\circ \approx 0.16$

解析：（1）飞机在 150 秒内飞行的距离是 $AB = 1000 \times 1000 \times \dfrac{150}{3600}$ m

在 ΔABC 中，根据正弦定理，得 $\dfrac{AB}{\sin(81^\circ - 18.5^\circ)} = \dfrac{BC}{\sin 18.5^\circ}$

解得 $BC \approx 14981m$

（2）飞机、山顶的海拔的差为

$BC \times \sin 81^\circ \approx 14831(m)$　　所以 $20250 - 14831 \approx 5419m$

即山顶的海拔高度为 $5419m$

20.（本小题满分 10 分）说明：请同学们在（A）、（B）两个小题中任选一题作答.

（A）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2 + a_n$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $2b_{n+1} - b_n = 0$，且 $a_1 = b_1 = 1, n \in N^*$

（1）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

（2）求数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

解析：（1）由 $a_{n+1} = 2 + a_n$ 得 $a_{n+1} - a_n = 2$，得 $\{a_n\}$ 是以 2 为公差的等差数列，

而 $a_1 = 1$，故 $a_n = 2n - 1$；又 $2b_{n+1} - b_n = 0$，即 $b_{n+1} = \dfrac{1}{2} b_n$，

可知 $\{b_n\}$ 是以 $\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列，

而 $b_1 = 1$，故 $b_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

（2）因为$a_n\cdot b_n=\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$

故$S_n=\dfrac{1}{2^0}+\dfrac{3}{2^1}+\dfrac{5}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$，

$\dfrac{1}{2}S_n=\quad\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-3}{2^{n-1}}+\dfrac{2n-1}{2^n}$　　两式相减可得

$$\frac{1}{2}S_n=1+2\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}=1+2\left(\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{1}{2}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}$$

所以$S_n=6-\dfrac{2n+3}{2^{n-1}}$

20.（B）已知数列$\{a_n\}$满足$\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2}{a_n\cdot a_{n+1}}$，数列$\{b_n\}$满足$S_n+b_n=2$，其中$S_n$为$\{b_n\}$的前$n$项和，且$a_1=b_1=1,n\in N^*$

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式

（2）求数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前n项和S_n.

解析：（1）由$\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2}{a_n\cdot a_{n+1}}$，同乘以$a_n\cdot a_{n+1}$得$a_{n+1}-a_n=2$

可知$\{a_n\}$是以2为公差的等差数列，而$a_1=1$，故$a_n=2n-1$；

又$S_n+b_n=2,\therefore S_{n-1}+b_{n-1}=2(n\ge2)$，相减得：$2b_n-b_{n-1}=0,\therefore b_n=\dfrac{1}{2}b_{n-1}$

可知$\{b_n\}$是以$\dfrac{1}{2}$为公比的等比数列，而$b_1=1$，故$b_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

（2）因为$a_n\cdot b_n=\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$，

$\therefore T_n=\dfrac{1}{2^0}+\dfrac{3}{2^1}+\dfrac{5}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$

$\therefore\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-3}{2^{n-1}}+\dfrac{2n-1}{2^n}$

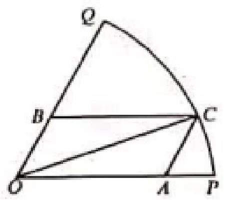
两式相减得

$$\frac{1}{2}T_n=1+2\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}=1+2\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}$$

$\therefore T_n=6-\dfrac{2n+3}{2^{n-1}}$

21.（本小题满分 12 分）说明：请同学们在（A）、（B）两个小题中任选一题作答.

（A）如图，已知 OPQ 是半径为 1，圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的扇形，C 是扇形弧上的动点，点 A,B 分别在半径 OP,OQ 上，且 $OACB$ 是平行四边形，记 $\angle COP=\alpha$，四边形 $OACB$ 的面积为 S，问当 α 取何值时，S 最大？S 的最大值是多少？



解析：设 $OA=x,OB=y$，

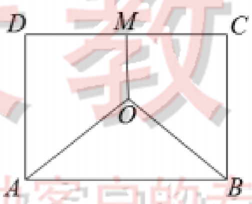
在 ΔOAC 中，由余弦定理得：$x^2+y^2+xy=1$，

由基本不等式，$1=x^2+y^2+xy\ge 3xy, xy\le\frac{1}{3}$，

而 $S=xy\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}xy\le\frac{\sqrt{3}}{6}$，当 $x=y$ 时取等号，此时 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，

所以当 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时，S 最大，最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$

（B）如图，某地三角工厂分别位于边长为 2 的正方形 $ABCD$ 的两个顶点 A,B 及 CD 中点 M 处。为处理这三角工厂的污水，在该正方形区域内（含边界）与 A,B 等距的点 O 处建一个污水处理厂，并铺设三条排污管道 AO,BO,MO，记铺设管道总长为 y 千米.



（1）按下列要求建立函数关系式：

（i）设 $\angle BAO=\theta$，将 y 表示成 θ 的函数;

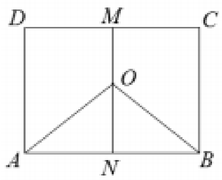
（ii）设 $MO=2-x$，将 y 表示成 x 的函数;

（2）请你选用一个函数关系，确定污水厂位置，使铺设管道总长最 短.

解析：

（1）(i) 设 AB 中点 N，则 $AN=1, ON=\tan\theta, OA=\frac{1}{\cos\theta}, MO=2-\tan\theta$

$y=\frac{2-\sin\theta}{\cos\theta}+2$（$0\le\theta\le\theta_0$，其中 $\tan\theta_0=2$ ）.



（ ii ）$\because MO=2-x, \therefore ON=x, AO=\sqrt{x^2+1}$

$\therefore y=2\sqrt{x^2+1}-x+2,(0\le x\le 2)$.

（2）设 $m=\sqrt{x^2+1}+x, n=\sqrt{x^2+1}-x,(m,n>0)$，则 $mn=1$.

$\therefore y=\frac{1}{2}m+\frac{3}{2}n+2\ge 2\sqrt{\frac{3}{4}mn}+2=\sqrt{3}+2.$

当 $m=3n$，即 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，y 取最小值 $2+\sqrt{3}$.

所以污水厂设在与直线 AB 距离 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 处时，铺设管道总长最短，最短长度为 $2+\sqrt{3}$ 千米.