太原市2019年高三年级数学（理）模拟试题（二）参考答案

一. 选择题：D A C D B C B A A B D B

二. 填空题： 13. $\dfrac{2}{5}$ 14. $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{6}$ 15. $3(\sqrt{2}+1)$ 16. 1

三. 解答题：

17 解：（Ⅰ）当$n=1$时，$2S_1=(a_1-1)(a_1+2)=2a_1$，$\because a_1>0$，$\therefore a_1=2$，………2 分

当$n\ge 2$时，$2a_n=2(S_n-S_{n-1})=(a_n-1)(a_n+2)-(a_{n-1}-1)(a_{n-1}+2)$，

$\therefore (a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-1)=0$，$\because a_n>0$，$\therefore a_n-a_{n-1}-1=0$，$\therefore a_n-a_{n-1}=1$，………4 分

$\therefore \{a_n\}$是以$a_1=2$为首项，$d=1$为公差的等差数列，$\therefore a_n=n+1(n\in N^*)$；………6 分

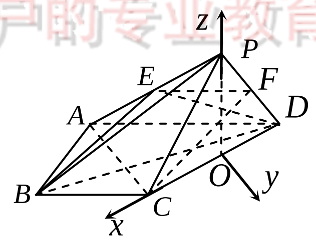
（Ⅱ）由（Ⅰ）得$a_n=n+1$，$\therefore b_n=\dfrac{3^n(2n-1)}{n(n+1)}=\dfrac{3^{n+1}}{n+1}-\dfrac{3^n}{n}$， …………8 分

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+b_n=(\dfrac{3^2}{2}-3)+(\dfrac{3^3}{3}-\dfrac{3^2}{2})+\cdots+(\dfrac{3^n}{n}-\dfrac{3^{n-1}}{n-1})+(\dfrac{3^{n+1}}{n+1}-\dfrac{3^n}{n})=\dfrac{3^{n+1}}{n+1}-3$，

$\because T_{n+1}-T_n=\dfrac{3^{n+2}}{n+2}-\dfrac{3^{n+1}}{n+1}=\dfrac{3^{n+1}(2n+1)}{(n+1)(n+2)}>0$，$\therefore \{T_n\}$是递增数列，

$\therefore T_n\ge T_1=\dfrac{9}{2}-3=\dfrac{3}{2}$. …………12 分

18.（Ⅰ）证明：设F是PD的中点，连接EF、CF，



$\because E$是PA的中点，$\therefore EF//AD$，$EF=\dfrac{1}{2}AD$，

$\because AD//BC$，$AD=2BC$，$\therefore EF//BC$，$EF=BC$，

$\therefore BCFE$是平行四边形，$\therefore BE//CF$，…………2 分

$\because AD//BC$，$AB\perp AD$，$\therefore \angle ABC=\angle BAD=90°$，

$\because AB=BC$，$\therefore \angle CAD=45°$，$AC=\sqrt{2}$，

由余弦定理得$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cdot\cos\angle CAD=2$，

$\therefore AC^2+CD^2=4=AD^2$，$\therefore AC\perp CD$，

$\because PD\perp AC$，$\therefore AC\perp$平面PCD，$\therefore AC\perp CF$，…………5 分

$\therefore AC\perp BE$；…………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$AC\perp$平面PCD，$CD=\sqrt{2}$，$\therefore$平面$ABCD\perp$平面PCD，

过点P作$PO\perp CD$，垂足为O，$\therefore OP\perp$平面$ABCD$，以O为坐标原点，$\overrightarrow{OC}$的方向为x轴的正方向，建立如图的空间直角坐标系$O-xyz$，

则 $P(0,0,\frac{\sqrt{6}}{2})$，$D(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,0)$，$B(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$，$E(\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{4})$

$\therefore \overrightarrow{BP}=(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2})$, ·········8 分

设 $\vec{m}=(x,y,z)$ 是平面 BDE 的一个法向量, 则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}-\frac{3\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y=0,\\ -\frac{3\sqrt{2}}{4}x+\frac{\sqrt{6}}{4}z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，则 $\begin{cases}y=3,\\ z=\sqrt{3},\end{cases}$ $\therefore \vec{m}=(1,3,\sqrt{3})$， ·········10 分

$\therefore \cos<\vec{m},\overrightarrow{BP}>=\frac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{BP}}{|\vec{m}||\overrightarrow{BP}|}=\frac{\sqrt{26}}{13}$,

$\therefore$ 直线 BP 与平面 BDE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{26}}{13}$. ·········12 分

19. 解：（1）由题意得 ξ 的所有取值为 $0.9a$, a, $1.5a$, $2.5a$, $4a$，其分布列为

ξ	$0.9a$	a	$1.5a$	$2.5a$	$4a$
p	0.7	0.2	0.06	0.03	0.01

η 的所有取值为 0, $2.5a$, $4a$, $5a$, $5.5a$，其分布列为

η	0	$2.5a$	$4a$	$5a$	$5.5a$
p	0.7	0.2	0.06	0.03	0.01

············6 分

（2）由（1）可得该公司此险种一续保人在下一年度续保费用的平均值为

$E(\xi)=0.9a\times0.7+a\times0.2+1.5a\times0.06+2.5a\times0.03+4a\times0.01=1.035a$，

该公司此险种一续保人下一年度所获赔付金额的平均值为

$E(\eta)=0\times0.7+2.5a\times0.2+4a\times0.06+5a\times0.03+5.5a\times0.01=0.945a$， ············10 分

$\therefore$ 该公司此险种的总收益为 $100\times(1.035a-0.945a)=9a$，

$\therefore 9a\geq900$，$\therefore a\geq100$，$\therefore$ 基本保费为 a 的最小值为 100 元. ············12 分

20 解：（Ⅰ）由题意可得 $F(0,\frac{p}{2})$，

①当 $k\neq0$ 时，设直线 $l:y=kx+\frac{p}{2}$，点 A,B 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，

由 $\begin{cases}y=kx+\frac{p}{2},\\ x^2=2py\end{cases}$ 得 $x^2-2pkx-p^2=0$，$\therefore \begin{cases}x_1+x_2=2pk,\\ x_1x_2=-p^2,\end{cases}$ ············1 分

过点 A 的切线方程为 $y-y_1=\dfrac{x_1}{p}(x-x_1)$，即 $y=\dfrac{x_1}{p}x-\dfrac{x_1^{\ 2}}{2p}$，

过点 B 的切线方程为 $y=\dfrac{x_2}{p}x-\dfrac{x_2^{\ 2}}{2p}$，

由 $\begin{cases} y=\dfrac{x_1}{p}x-\dfrac{x_1^{\ 2}}{2p}, \\ y=\dfrac{x_2}{p}x-\dfrac{x_2^{\ 2}}{2p} \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=pk, \\ y=\dfrac{x_1x_2}{2p}=-\dfrac{p}{2}, \end{cases}$ $\therefore M(pk,-\dfrac{p}{2})$， …………4 分

$\because k_{FM}\cdot k_{AB}=\dfrac{-\dfrac{p}{2}-\dfrac{p}{2}}{pk}\cdot k=-1$，$\therefore FM\perp AB$； …………5 分

②当 $k=0$ 时，则直线 $l:y=\dfrac{p}{2}$，$M(0,-\dfrac{p}{2})$，$\therefore FM\perp AB$；…………6 分

（Ⅱ）①当 $k\neq 0$ 时，设直线 $l:y=kx+m$，点 A,B 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2=2py \end{cases}$ 得 $x^2-2pkx-2pm=0$，$\therefore \begin{cases} x_1+x_2=2pk, \\ x_1x_2=-2pm, \end{cases}$ …………8 分

过点 A 的切线方程为 $y-y_1=\dfrac{x_1}{p}(x-x_1)$，即 $y=\dfrac{x_1}{p}x-\dfrac{x_1^{\ 2}}{2p}$，

过点 B 的切线方程为 $y=\dfrac{x_2}{p}x-\dfrac{x_2^{\ 2}}{2p}$，

由 $\begin{cases} y=\dfrac{x_1}{p}x-\dfrac{x_1^{\ 2}}{2}, \\ y=\dfrac{x_2}{p}x-\dfrac{x_2^{\ 2}}{2} \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=pk=2, \\ y=\dfrac{x_1x_2}{2p}=-m=-2p, \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} pk=2, \\ m=2p, \end{cases}$ $\Delta=4p^2k^2+16p^2>0$，…10 分

$\therefore |AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{4k^2p^2+8pm}$

$=4\sqrt{1+k^2}\sqrt{1+p^2}=4\sqrt{(1+\dfrac{4}{p^2})(1+p^2)}=4\sqrt{10}$，

$\therefore p=1$ 或 $p=2$，$\therefore$ 抛物线 C 的方程为 $x^2=2y$ 或 $x^2=4y$. …………12 分

21.（Ⅰ）解：由题意得 $f'(x)=e^x+\dfrac{1}{x+1}-a$，$x>-1$，

令 $g(x)=f'(x)=e^x+\dfrac{1}{x+1}-a$，$x>-1$，则 $g'(x)=e^x-\dfrac{1}{(x+1)^2}$，

令 $h(x)=g'(x)=e^x-\dfrac{1}{(x+1)^2}$，$x>-1$，则 $h'(x)=e^x+\dfrac{2}{(x+1)^3}>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上递增，且 $h(0)=0$，

当 $x\in(-1,0)$ 时，$g'(x)=h(x)<0$，$g(x)$ 递减；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)=h(x)>0$，$g(x)$ 递增，

$\therefore g(x)\ge g(0)=2-a$，…………2 分

①当 $a\le 2$ 时，$f'(x)=g(x)>g(0)=2-a\ge 0$，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 递增，此时无极值；

②当 $a>2$ 时，$\because g(\dfrac{1}{a}-1)=e^{\frac{1}{a}-1}>0$，$g(0)=2-a<0$，$\therefore \exists x_1\in(\dfrac{1}{a}-1,0)$，$g(x_1)=0$，

当 $x\in(-1,x_1)$ 时，$g(x)=f'(x)>0$，$f(x)$ 递增；当 $x\in(x_1,0)$ 时，$g(x)=f'(x)<0$，$g(x)$ 递减，$\therefore x=x_1$ 是 $f(x)$ 的极大值；

$\because g(\ln a)=\dfrac{1}{1+\ln a}>0$，$g(0)=2-a<0$，$\therefore \exists x_2\in(0,\ln a)$，$g(x_2)=0$，

当 $x\in(0,x_2)$ 时，$g(x)=f'(x)<0$，$f(x)$ 递减；当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$g(x)=f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，$\therefore x=x_2$ 是 $f(x)$ 的极小值；

综上所述，$a\in(2,+\infty)$；…………6 分

（Ⅱ）证明：由（Ⅰ）得 $a\in(2,+\infty)$，$\dfrac{1}{a}-1<x_1<0<x_2<\ln a$，且 $g(x_1)=g(x_2)=0$，

$\therefore x_2-x_1>0$，$\dfrac{1}{a}<x_1+1<1$，$1<x_2+1<1+\ln a$，$e^{x_2}-e^{x_1}=\dfrac{x_2-x_1}{(x_1+1)(x_2+1)}$，

$\therefore \dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}-a<0$，$1<\dfrac{x_2+1}{x_1+1}<a(1+\ln a)<a^2$，…………10 分

$\therefore f(x_2)-f(x_1)=e^{x_2}-e^{x_1}+\ln\dfrac{x_2+1}{x_1+1}-a(x_2-x_1)$

$=(x_2-x_1)\,[\dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}-a]+\ln\dfrac{x_2+1}{x_1+1}<\ln a^2=2\ln a$．…………12 分

22 解：（Ⅰ）设 $P(x,y)$，$M(x',y')$，$\because \overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OM}$，$\therefore \begin{cases} x'=\dfrac{1}{2}x, \\ y=\dfrac{1}{2}y, \end{cases}$ …………2 分

$\because$ 点 M 在曲线 C_1 上，$\therefore \begin{cases} x'=2+\cos\varphi, \\ y'=1+\sin\varphi, \end{cases}$ $\therefore$ 曲线 C_1 的普通方程为 $(x'-2)^2+(y'-1)^2=1$，

$\therefore$ 曲线 C_2 的普通方程为 $(x-4)^2+(y-2)^2=4$；…………5 分

（Ⅱ）由$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$得曲线$C_1$的极坐标方程为$\rho^2-4\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta+4=0$，

曲线C_2的极坐标方程为$\rho^2-8\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+16=0$，…………7 分

由$\begin{cases}\rho^2-4\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta+4=0,\\ \theta=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$得$\begin{cases}\rho=\sqrt{2},\\ \theta=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$或$\begin{cases}\rho=2\sqrt{2},\\ \theta=\dfrac{\pi}{4},\end{cases}$

$\therefore A(\dfrac{\pi}{4},\sqrt{2})$或$(\dfrac{\pi}{4},2\sqrt{2})$，

由$\begin{cases}\rho^2-8\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+16=0,\\ \theta=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$得$\begin{cases}\rho=2\sqrt{2},\\ \theta=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$或$\begin{cases}\rho=4\sqrt{2},\\ \theta=\dfrac{\pi}{4},\end{cases}$

$\therefore B(\dfrac{\pi}{4},2\sqrt{2})$或$(\dfrac{\pi}{4},4\sqrt{2})$，

$\therefore|AB|$的最大值为$3\sqrt{2}$．……………10 分

23 解：（Ⅰ）当$a=\dfrac{1}{2}$时，原不等式为$|2x-\dfrac{1}{2}|-|x+1|\geq 1$，

$\therefore\begin{cases}x<-1,\\ -2x+\dfrac{1}{2}+x+1\geq 1,\end{cases}$或$\begin{cases}-1\leq x\leq\dfrac{1}{4},\\ -2x+\dfrac{1}{2}-x-1\geq 1,\end{cases}$或$\begin{cases}x>\dfrac{1}{4},\\ 2x-\dfrac{1}{2}-x-1\geq 1,\end{cases}$…………3 分

$\therefore x<-1$或$-1\leq x\leq-\dfrac{1}{2}$或$x\geq\dfrac{5}{2}$，

$\therefore$原不等式的解集为$(-\infty,-\dfrac{1}{2}]\cup[\dfrac{5}{2},+\infty)$，…………5 分

（Ⅱ）由题意得$f(x)_{\min}\leq(|k+3|-|k-2|)_{\min}$，…………7 分

$\because f(x)=\begin{cases}-x+3a,x<-2a,\\ -3x-a,-2a\leq x\leq\dfrac{a}{2},\\ x-3a,x>\dfrac{a}{2},\end{cases}$ $\therefore f(x)_{\min}=f(\dfrac{a}{2})=-\dfrac{5}{2}a$，

$\because -5=-|(k+3)-(k-2)|\leq|k+3|-|k-2|$，$\therefore(|k+3|-|k-2|)_{\min}=-5$，

$\therefore-\dfrac{5}{2}a\leq-5$，$\therefore a\geq 2$，$\therefore a$的取值范围$[2,+\infty)$．…………10 分