太原市2020年高三年级模拟试题（一）

数学试题（文）参考答案及评分标准

一、选择题（每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	A	B	C	C	B	D	D	B	C	B	D

二、填空题（每小题5分，共20分）

13. 4　　14. $-\dfrac{1}{2}$　　15. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　16. $m+1$

三、解答题（共70分）

（一）必考题

17. （本小题满分12分）

解：（Ⅰ）由题意得

$0.002\times20+0.006\times20+a\times20+0.012\times20+0.010\times20+a\times20+0.002\times20+0.002\times20=1$，

解得 $a=0.008$，……………………………………………………2分

设中位数为 $110+x$，则 $0.002\times20+0.006\times20+0.008\times20+0.012\cdot x=0.5$，解得 $x=15$，

∴中位数是125. ……………………………………………………4分

（Ⅱ）由 $175\times(0.002\times20+0.006\times20+0.008\times20+0.012\times20)=98$．

∴估计一天步行数不大于130百步的人数为98人. ……………………6分

（Ⅲ）在区间 $(150,170]$ 中有28人，在区间 $(170,190]$ 中有7人，在区间 $(190,210]$ 中有7人，

按分层抽样抽取6人，则从 $(150,170]$ 抽取4人，$(170,190]$ 和 $(190,210]$ 各抽取1人. 8分

设从 $(150,170]$ 抽取 A_1,A_2,A_3,A_4，从 $(170,190]$ 抽取B，从 $(190,210]$ 抽取C，

则从6人中抽取2人的情况有：

$A_1A_2,A_1A_3,A_1A_4,A_1B,A_1C,A_2A_3,A_2A_4,A_2B,A_2C,A_3A_4,A_3B,A_3C,A_4B,A_4C,BC$，共15种情况，

它们是等可能的，其中满足两人均来自区间 $(150,170]$ 的有 $A_1A_2,A_1A_3,A_1A_4,A_2A_3,A_2A_4,A_3A_4$，共有6种情况，……………………………11分

$\therefore P=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$，

∴两人均来自区间 $(150,170]$ 的概率为 $\dfrac{2}{5}$． ……………………………12分

18.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）$\because 2\cos\dfrac{2\pi}{3}\sin(\dfrac{\pi}{6}+C)+\cos C=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore \sin(\dfrac{\pi}{6}+C)-\cos C=\dfrac{1}{2}$， ....1 分

$\therefore \dfrac{1}{2}\cos C+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C-\cos C=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C-\dfrac{1}{2}\cos C=\dfrac{1}{2}$， ....3 分

$\therefore \sin(C-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$， ....5 分

而 C 为三角形内角，$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$. ....6 分

（Ⅱ）由 ΔABC 的面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 及 $C=\dfrac{\pi}{3}$，得 $\dfrac{1}{2}ab\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$， ....7 分

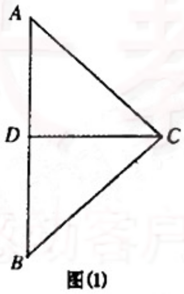
化简得 $ab=6$， ....8 分

又 $c=3$，由余弦定理，得 $a^2+b^2-2ab\cos C=9$，化简得 $a^2+b^2=15$， ....10 分

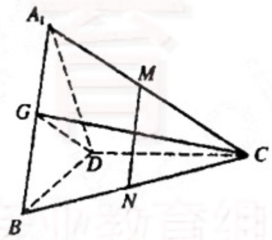
所以 $a+b=3\sqrt{3}$， ....11 分

所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ....12 分

19.（本小题满分 12 分）



图(1)



图(2)

证明（Ⅰ）由已知得 $A_1C=BC=2\sqrt{2}$，

$A_1D=BD=CD=2$， ....1 分

在三棱锥 A_1-BCD 中，$\because$ 点 G 是 A_1B 中点，

$\therefore DG\perp A_1B$，$CG\perp A_1B$，又 $DG\cap CG=G$， ....3 分

$\therefore A_1B\perp$ 平面 DGC， ....4 分

又 $\because$ 点 M、N 分别是 A_1C、BC 的中点 $\therefore MN\parallel A_1B$，

$\therefore MN\perp$ 平面 DGC. ....6 分

解（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$CD\perp A_1D, CD\perp BD$，且 $A_1D\cap BD=D$,

$\therefore CD\perp$ 平面 A_1DG， ....8 分

又 $\angle A_1DB=60^0$，$\therefore \Delta A_1DB$ 是等边三角形，

$\therefore DG\perp A_1B$，$A_1B=2$，$A_1G=\dfrac{1}{2}A_1B=1$，$DG=\sqrt{3}$， ....10 分

$\therefore S_{\Delta A_1DG}=\dfrac{1}{2}A_1G\times DG=\dfrac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore V_{G-A_1DC}=V_{C-A_1DG}=\frac{1}{3}S_{\Delta A_1DG}\times CD=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………12 分

20.（本小题满分 12 分）

解（Ⅰ）$\because f(x)=\mathrm{e}^x-\cos x$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^x+\sin x$，$\therefore f(0)=0, f'(0)=1$. ……………3 分

因此，函数 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x$，即 $x-y=0$；……………………5 分

（Ⅱ）当 $x>0$ 时，$\mathrm{e}^x>1\geq\cos x$，此时，$f(x)=\mathrm{e}^x-\cos x>0$，

所以，函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上没有零点；……………………………………………6 分

又 $f(0)=0$，下面只需证明函数 $y=f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上有且只有一个零点. …………7 分

$f'(x)=\mathrm{e}^x+\sin x$，构造函数 $g(x)=\mathrm{e}^x+\sin x$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x+\cos x$，

当 $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 时，$g'(x)=\mathrm{e}^x+\cos x>0$，所以，函数 $y=f'(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递增，

$\because f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}-1<0$，$f'(0)=1>0$，

由零点存在定理知，存在 $t\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，使得 $f'(t)=0$，……………………………………9 分

当 $-\frac{\pi}{2}<x<t$ 时，$f'(x)<0$，当 $t<x<0$ 时，$f'(x)>0$.

所以，函数 $y=f(x)$ 在 $x=t$ 处取得极小值，则 $f(t)<f(0)=0$，

又 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}>0$，所以 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot f(t)<0$，

由零点存在定理可知，函数 $y=f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上有且只有一个零点. …………11 分

综上所述，函数 $y=f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 上有且仅有两个零点. ……………………………12 分

21.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其中 $b^2=a^2-1$，

由已知当 $\lambda=2$ 时，不妨设 $|BF_2|=m$，则 $|AF_2|=2m$，

$\because |AB|=|BF_1|$，$\therefore |BF_1|=3m$，

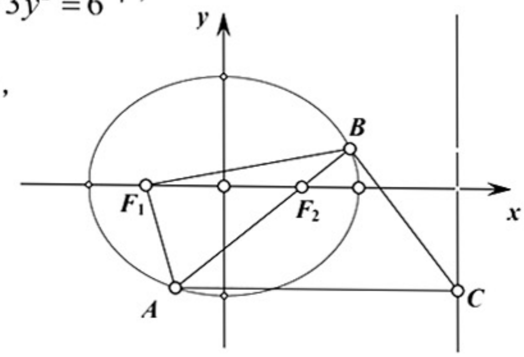
由椭圆定义得 $2a=4m$，从而 $|AF_1|=|AF_2|=2m$，……………………………………2 分

故此时点 A 在 y 轴上，不妨设 $A(0,-b)$，从而由已知条件可得 $B(\frac{3}{2},\frac{b}{2})$，……………………4 分

代入椭圆方程，解得 $a^2=3$，所以 $b^2=a^2-1=2$，

故所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. ……………………………………………6 分

（II）设直线 AB 方程为 $x=my+1$，代入椭圆 $2x^2+3y^2=6$ 中，



$2(my+1)^2+3y^2=6$，即 $(2m^2+3)y^2+4my-4=0$，

$y_1+y_2=\frac{-4m}{2m^2+3}$，$y_1y_2=\frac{-4}{2m^2+3}$，

$\therefore m=\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}$，……………………8 分

由题设知 $H(2,0)$，直线 BH 斜率 $k_{BH}=\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{y_2}{my_2-1}=\frac{y_2}{\frac{y_1+y_2}{y_1}-1}=y_1$，……10 分

$\therefore BH$ 方程为 $y=y_1(x-2)$，而直线 l_2 方程为 $y=y_1$，代入 $y=y_1(x-2)$，得 $x=3$

故点 C 的横坐标是定值 3. ……………………………………………12 分

另解：点 C 的横坐标是定值 3，以下给出证明.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，代入椭圆方程，得

$2x_1^2+3y_1^2=6$，……①

$2x_2^2+3y_2^2=6$，……②

②两边同乘以 λ^2，得 $2\lambda^2x_2^2+3\lambda^2y_2^2=6\lambda^2$，……③

①-③，得 $2(x_1-\lambda x_2)(x_1+\lambda x_2)+3(y_1-\lambda y_2)(y_1+\lambda y_2)=6(1-\lambda^2)$，……④ ……………………8 分

由 $\overrightarrow{AF_2}=\lambda\overrightarrow{F_2B}$，得 $x_1+\lambda x_2=1+\lambda$，$y_1+\lambda y_2=0$，

将 $x_1+\lambda x_2=1+\lambda$，$y_1+\lambda y_2=0$ 代入④化简，得 $x_1-\lambda x_2=3(1-\lambda)$，

从而 $x_1=2-\lambda$，$\lambda x_2=-1+2\lambda$，……………………………………10 分

设点 $C(x_3,y_1)$，$\because C,H,B$ 三点共线，设 $\overrightarrow{CH}=\mu\overrightarrow{HB}$，则 $\begin{cases}2-x_3=\mu(x_2-2),\\ -y_1=\mu y_2,\end{cases}$

而已知 $y_1+\lambda y_2=0$，$\therefore \lambda=\mu$，$2-x_3=\lambda(x_2-2)$，$x_3=-\lambda x_2+2\lambda+2=3$，

因此无论 λ 如何变化，点 C 的横坐标总是定值 3． ……………………………………12 分

【选修 4-4：坐标系与参数方程】

22.（本小题满分 10 分）

解（Ⅰ）设点 $M(x,y)$，$P(3\cos\theta,3\sin\theta)$，且点 $Q(6,0)$，由 $\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{MQ}$，

得 $\begin{cases} x=4+\cos\theta, \\ y=\sin\theta, \end{cases}$ ……………………………………2 分

整理得 $(x-4)^2+y^2=1$，即 $x^2+y^2-8x+15=0$， ……………………3 分

化为极坐标方程为 $\rho^2-8\rho\cos\theta+15=0$． ……………………………………5 分

（Ⅱ）设直线 l：$y=kx$ 的极坐标方程为 $\theta=\alpha$．设 $A(\rho_1,\alpha)$，$B(\rho_2,\alpha)$，

因为 $\overline{OA}=4\overline{AB}$，所以 $5\overline{OA}=4\overline{OB}$，即 $5\rho_1=4\rho_2$， ……………………………………6 分

又 $\rho^2-8\cos\alpha\cdot\rho+15=0$， 则 $\begin{cases} \rho_1+\rho_2=8cos\alpha, \\ \rho_1\rho_2=15, \\ 5\rho_1=4\rho_2, \end{cases}$ 解得 $\cos\alpha=\dfrac{9\sqrt{3}}{16}$， …………8 分

所以 $k^2=\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1=\dfrac{13}{243}$， $k=\pm\dfrac{\sqrt{39}}{27}$． ……………………………………10 分

【选修 4-5：不等式选讲】

23.（本小题满分 10 分）

解：（Ⅰ）函数 $f(x)+2g(x)=|2x-a|+2|x-1|$

$=|2x-a|+|2x-2|\ge|2x-a-(2x-2)|=|a-2|=1$， ……………………………………3 分

解得 $a=1$ 或 $a=3$； ……………………………………5 分

（Ⅱ）不等式 $f(x)+g(x)<1$，即 $|2x-a|+|x-1|<1$，

由题意，$x\in[\dfrac{1}{2},1]$ 时，$|2x-a|+1-x<1$ 成立，

$\therefore|2x-a|<x$．$\therefore \dfrac{a}{3}<x<a$， ……………………………………7 分

不等式 $f(x)+g(x)<1$ 的解集包含 $[\dfrac{1}{2},1]$，即 $\dfrac{a}{3}<\dfrac{1}{2}$ 且 $a>1$， ……………………………………9 分

解得 $1<a<\dfrac{3}{2}$，所以实数 a 的取值范围是 $(1,\dfrac{3}{2})$． ……………………………………10 分