太原市2020年高三年级模拟试题（二）

数学试题（文）参考答案及评分标准

一、选择题（每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	A	B	D	C	A	C	B	D	B	D

二、填空题（每小题5分，共20分）

13. 1　　14. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　　15. $2\sqrt{2}$　　16. ③

三、解答题（共70分）

（一）必考题

17.（本小题满分12分）

解：（Ⅰ）当$n=1$时，$S_1=a_1=\frac{3}{2}a_1+1-3$，得$a_1=4$， ……………………1分

当$n\geq 2$时，$S_{n-1}=\frac{3}{2}a_{n-1}+(n-1)-3$，

则$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{3}{2}a_n-\frac{3}{2}a_{n-1}+1$，　即$a_n=3a_{n-1}-2$， ……………………4分

$\therefore a_n-1=3(a_{n-1}-1)$， ……………………5分

$\therefore$数列$\{a_n-1\}$是以$a_1-1=3$为首项，公比为3的等比数列. ……………………6分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$a_n-1=3^n$， ……………………7分

$\therefore b_n=\log_3(a_1-1)+\log_3(a_2-1)+\ldots+\log_3(a_n-1)=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$， …..9分

$\therefore c_n=\frac{1}{b_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$， ……………………10分

$\therefore T_n=2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{2n}{n+1}$. ……………………12分

18.（本小题满分12分）

解（Ⅰ）由已知得$\begin{cases}1+m+29+n+7=100,\\ \frac{n+7}{29}=\frac{4}{2},\end{cases}$ ……………………2分

解得 $m=12, n=51$， ……………………………3 分

所以特级品的频率为 $\dfrac{51+7}{100}=0.58$，

所以这批水果中特级品的比例为58%. ……………………………5 分

（II）选用方案 A，种植户的收益为

20000×6.5=130000 （元）， ……………………………7 分

选用方案 B，种植户的收益为

$$=20000\times20\times\frac{1}{20}\times\left[\frac{3}{100}+\frac{12\times4}{100}+\frac{29\times5}{100}+\frac{58\times8}{100}\right]$$

$=132000$， ……………………………11 分

$\because 132000>130000$，

所以选用方案 B. ……………………………12 分

19.（本小题满分 12 分）

证明：（I）过 E 作 EH⊥DC 于 H，连结 FH，可得 DH=$\dfrac{1}{2}$， ………………2 分

∵底面 ABCD 是正方形，AB=4AF，即 AF=$\dfrac{1}{2}$，

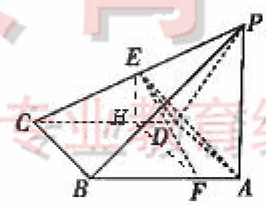
∴AFHD 是矩形，　∴FH⊥DC， ……………………………3 分

又 EH⊥DC，EH∩FH=H，

∴DC⊥面 EFH， ……………………………5 分

又∵EF⊂面 EFH，

∴DC⊥EF. ……………………………6 分



（II）由（I）知，FH∥平面 ADE，

∴点 F 到平面 ADE 的距离等于点 H 到平面 ADE 的距离， ……………………………7 分

∵底面 ABCD 是正方形，侧面 PCD⊥底面 ABCD，

∴AD⊥侧面 PDC，　∴AD⊥DE，

在三棱锥 H－ADE 中，设点 H 到平面 ADE 的距离为 d，

由于 $V_{H-ADE}=V_{A-DEH}$，　$\therefore \frac{1}{3}\cdot S_{DEH}\cdot AD=\frac{1}{3}\cdot S_{ADE}\cdot d$， ……………………………9 分

在侧面 PCD 中，PD=DC=2，∠PDC=120°，E 是 PC 中点，∴DE=1，$EH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times2=2\times1\times d$， ……………………………11 分

$\therefore d=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，即点 F 到平面 ADE 的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. ……………………………12 分

20.（本小题满分 12 分）

解（Ⅰ）由题意得 $\begin{cases} e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\dfrac{3}{4}, \\ b=1, \end{cases}$ ……………………2 分

解得 $a^2=4,b^2=1$， ……………………4 分

所以椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………5 分

（Ⅱ）依题意，直线 l 斜率存在，设方程为 $y=kx+m$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$， ……………………6 分

得 $x_1+x_2=\dfrac{-8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2}$，

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m$，$y_1y_2=k^2x_1x_2+mk(x_1+x_2)+m^2$， ……………………8 分

$\because MA\perp MB$，$\therefore \overline{MA}\cdot\overline{MB}=0$，即 $x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)=0$， ……………………9 分

代入整理得 $\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2}+\dfrac{m^2-4k^2}{1+4k^2}-\dfrac{2m}{1+4k^2}+1=0$，

即 $5m^2-2m-3=0$，解得 $m=-\dfrac{3}{5}$，$m=1$（舍） ……………………11 分

所以直线 l 过定点 $(0,-\dfrac{3}{5})$. ……………………12 分

21.（本小题满分 12 分）

解（Ⅰ）$f(x)$ 的定义域是 $x>0$，$f'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{2x-a}{x^2}$， ……………………1 分

①当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在定义域上单调递增，不可能有两个零点； ……………2 分

②当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=\dfrac{2x-a}{x^2}=0$，得 $x=\dfrac{a}{2}>0$，

当 $x\in(0,\dfrac{a}{2})$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在定义域上单调递减；

当 $x\in(\dfrac{a}{2},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在定义域上单调递增；

$\therefore$ $x=\dfrac{a}{2}$ 时，$f(x)$ 取得极小值.

因为 $f(x)$ 有两个零点，所以 $f(\frac{a}{2})<0$，解得 $0<a<2e^{\frac{3}{2}}$， ……………………4 分

$\because f(e)=3+\frac{a}{e}>0$， $\therefore f(x)$ 在 $(\frac{a}{2},+\infty)$ 有唯一实数根；

取 $x_0=\frac{a^2}{e^2}<\frac{a}{2}$，

则 $f(x_0)=4\ln a-3+\frac{e^2}{a}>4\cdot\frac{a^2-1}{2a}-3+\frac{e^2}{a}=\frac{2a^2+e^2-3a-2}{a}>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\frac{a}{2})$ 有唯一实数根.

综上，a 的取值范围是 $(0,2e^{\frac{3}{2}})$. ……………………6 分

（Ⅱ）当 $a=1$ 时，由 $f(x_1)=f(x_2)=2m+1$，得 $\begin{cases}2\ln x_1+\frac{1}{x_1}+1=2m+1,\\ 2\ln x_2+\frac{1}{x_2}+1=2m+1,\end{cases}$

两式相减得 $2(\ln x_2-\ln x_1)+\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}=0$，则 $x_1=\frac{1-\frac{x_1}{x_2}}{2\ln\frac{x_2}{x_1}}$，$x_2=\frac{\frac{x_2}{x_1}-1}{2\ln\frac{x_2}{x_1}}$，

令 $\frac{x_2}{x_1}=t(t>1)$，则 $x_1+x_2=\frac{t-\frac{1}{t}}{2\ln t}$， ……………………8 分

设 $h(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t$，$h'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=(1-\frac{1}{t})^2>0$， ……………………10 分

$\therefore h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，$h(t)>h(1)=0$，又 $2\ln t>0(t>1)$，$\therefore\frac{t-\frac{1}{t}}{2\ln t}>1$，

$\therefore x_1+x_2>1$. ……………………12 分

【选修 4-4：坐标系与参数方程】

22.（本小题满分 10 分）

解（Ⅰ）由 $\begin{cases}x=\frac{t}{t+1},\\ y=\frac{2t+1}{t+1},\end{cases}$ 消去参数 t 得曲线 C_1 普通方程为 $x-y+1=0$， ……………………2 分

由 $\begin{cases}x=2+2\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$ 消去参数 α 得曲线 C_2 的直角坐标为 $x^2+y^2-4x=0$，

得曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$． ……………………………5 分

（Ⅱ）由 $\rho=4\cos\theta$ 得点 P 坐标为 $P(4\cos\beta,\beta)\ (0<\beta<\frac{\pi}{2})$，

又直线 $x-y+1=0$ 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+1=0$，

得点 $Q(\frac{1}{\cos\beta+\sin\beta},\frac{\pi}{2}+\beta)$， ……………………………7 分

$\therefore\ S_{\Delta OPQ}=\frac{1}{2}\cdot4\cos\beta\cdot\frac{1}{\cos\beta+\sin\beta}=1$， ……………………………8 分

$\therefore\ \cos\beta=\sin\beta$， $\beta=\frac{\pi}{4}$，

$\therefore\ |OP|=4\cos\beta=2\sqrt{2}$． ……………………………10 分

【选修 4-5：不等式选讲】

23.（本小题满分 10 分）

证明（Ⅰ）$(\frac{1}{a}-1)(\frac{1}{b}-1)(\frac{1}{c}-1)=\frac{1-a}{a}\cdot\frac{1-b}{b}\cdot\frac{1-c}{c}=\frac{b+c}{a}\cdot\frac{a+c}{b}\cdot\frac{a+b}{c}$

$\geq\frac{2\sqrt{bc}}{a}\cdot\frac{2\sqrt{ac}}{b}\cdot\frac{2\sqrt{ab}}{c}=8$． ……………………………5 分

（Ⅱ）$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=(\frac{a+b+c}{b+c}-1)+(\frac{a+b+c}{a+c}-1)+(\frac{a+b+c}{a+b}-1)$

$=\frac{1}{2}[(b+c)+(a+c)+(a+b)](\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b})-3$

$\geq\frac{1}{2}[\sqrt{b+c}\cdot\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\sqrt{a+c}\cdot\frac{1}{\sqrt{a+c}}+\sqrt{a+b}\cdot\frac{1}{\sqrt{a+b}}]^2-3$

$=\frac{1}{2}\times3^2-3=\frac{3}{2}$． ……………………………10 分

注：以上各题其他正确解法相应得分