



太原市 2020 年高三年级模拟试题 (二)

数学试题 (理) 参考答案及评分标准

一、选择题 (每小题 5 分, 共 60 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	A	B	D	C	A	B	B	D	C	B	D

二、填空题 (每小题 5 分, 共 20 分)

13. $\frac{1}{2}$ 14. $\sqrt{2}$ 15. $2n^2 - n$ 16. ②④

三、解答题 (共 70 分)

(一) 必考题

17. (本小题满分 12 分)

解(1) 由正弦定理, 有 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2$,1 分

$$\therefore \sin A = \frac{a}{2}, \sin B = \frac{b}{2}, \sin C = \frac{c}{2},$$

代入 $\frac{\sin^2 A - \sin^2 C}{\sin B} = \frac{\sqrt{2}a - b}{2}$, 得 $\frac{\frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{4}}{\frac{b}{2}} = \frac{\sqrt{2}a - b}{2}$,3 分

则 $a^2 - c^2 = \sqrt{2}ab - b^2$, 即 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

由余弦定理得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,5 分

$\because 0 < C < \pi$, $\therefore C = \frac{\pi}{4}$6 分

(II) 由正弦定理 $\frac{c}{\sin C} = 2$ 得 $c = 2\sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$,7 分

由余弦定理 $2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 2ab - \sqrt{2}ab = (2 - \sqrt{2})ab$,9 分

$\therefore ab \leq \frac{2}{2 - \sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$, 当且仅当 $a = b$ 时等号成立,10 分

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{\sqrt{2}}{4}ab \leq \frac{\sqrt{2} + 1}{2},$$





$$\therefore S_{\triangle ABC} \text{最大值} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}, \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

18. (本小题满分 12 分)

证明(1) 取 AO 的中点 H, 连结 EH, 则 EH ⊥ 平面 ABCD,

∵ BD 在平面 ABCD 内, ∴ EH ⊥ BD,2 分

又菱形 ABCD 中, AC ⊥ BD, 且 EH ∩ AC = H,

EH、AC 在平面 EACF 内,4 分

∴ BD ⊥ 平面 EACF, 即 BD ⊥ 平面 ACF.5 分

(II) 由(1) 知 EH ⊥ 平面 ABCD, 以 H 为原点,

建立如图所示空间直角坐标系 H - xyz,

∵ EH ⊥ 平面 ABCD, ∴ ∠EAH 为 AE 与平面 ABCD 所成的角, 即 ∠EAH = 45°,6 分

又 AB = 4, 则 AO = 2√3, AH = √3, EH = √3,

∴ H(0, 0, 0), A(√3, 0, 0), D(-√3, -2, 0), O(-√3, 0, 0), E(0, 0, √3),

易知 $\vec{n} = \vec{HE} = (0, 0, \sqrt{3})$ 为平面 ABCD 的一个法向量,8 分

$\vec{AO} = (-2\sqrt{3}, 0, 0)$, $\vec{DE} = (\sqrt{3}, 2, \sqrt{3})$, ∵ EF // AC, ∴ $\vec{EF} = \lambda \vec{AO} = (-2\sqrt{3}\lambda, 0, 0)$,

设平面 DEF 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$, 则 $\vec{m} \perp \vec{DE}$, $\vec{m} \perp \vec{EF}$,

即 $\vec{m} \cdot \vec{DE} = \sqrt{3}x + 2y + \sqrt{3}z = 0$, $\vec{m} \cdot \vec{EF} = -2\sqrt{3}\lambda x = 0$,

令 $y = \sqrt{3}$, 则 $x = 0$, $z = -2$, 则 $\vec{m} = (0, \sqrt{3}, -2)$ 为平面 DEF 的一个法向量,10 分

$$\therefore \cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}} = -\frac{2\sqrt{7}}{7}, \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

所以平面 DEF 与平面 ABCD 所成角的正弦值为

$$\sqrt{1 - \left(-\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{7}. \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

19. (本小题满分 12 分)

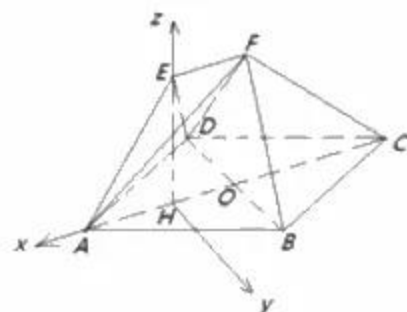
解(1) 直线 $x + y = 1$ 与 y 轴交于 (0, 1) 点, ∴ $b = 1$,1 分

设直线 $x + y = 1$ 与椭圆 C 交于点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$, $y_1 + y_2 = \frac{1}{2}$,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \quad \text{①} \qquad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \quad \text{②}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{得} \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2} + \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2} = 0,$$

$$\therefore \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}, \quad \therefore -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = -1, \text{ 解得 } a^2 = 3, \dots\dots\dots 4 \text{分}$$





∴ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$5 分

(II) 由(I)得 $F_1(-\sqrt{2}, 0)$, $F_2(\sqrt{2}, 0)$, 设 $A(x_3, y_3)$, $B(x_4, y_4)$,

将直线 l 的方程 $x = my - \sqrt{2}$ 代入 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$, 得 $(m^2 + 3)y^2 - 2\sqrt{2}my - 1 = 0$,

$$\text{则} \begin{cases} y_3 + y_4 = \frac{2\sqrt{2}m}{m^2 + 3}, \\ y_3 \cdot y_4 = \frac{-1}{m^2 + 3}, \end{cases} \quad |y_3 - y_4| = \sqrt{(y_3 + y_4)^2 - 4y_3y_4} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{m^2 + 1}}{m^2 + 3}, \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore S_{\triangle ABF_2} = \frac{1}{2} |F_1F_2| |y_3 - y_4| = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times |y_3 - y_4| = \sqrt{2} |y_3 - y_4|$$

$$= \frac{2\sqrt{6}\sqrt{m^2 + 1}}{m^2 + 3} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{m^2 + 1} + \frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}}} \leq \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{3}, \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

当且仅当 $\sqrt{m^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}}$, 即 $m = \pm 1$ 时, $\triangle ABF_2$ 面积最大,10 分

直线 l 的方程为 $x - y + \sqrt{2} = 0$ 或 $x + y + \sqrt{2} = 0$12 分

——做最感动客户的专业教育组织

20. (本小题满分 12 分)

解(I) 根据频率分布直方图中的分组, 用分层抽样的方法抽取的 40 件产品中, 尺寸在 $[12, 13)$, $[13, 14)$, $[14, 15]$ 的产品数分别为 8, 7, 3,1 分

ξ 的可能取值为 0, 1, 2,

$$P(\xi = 0) = \frac{C_{15}^2}{C_{18}^2} = \frac{35}{51}, \quad P(\xi = 1) = \frac{C_{15}^1 C_3^1}{C_{18}^2} = \frac{5}{17}, \quad P(\xi = 2) = \frac{C_3^2}{C_{18}^2} = \frac{1}{51},$$

∴ ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{35}{51}$	$\frac{5}{17}$	$\frac{1}{51}$

.....4 分

$$\therefore E\xi = 0 \times \frac{35}{51} + 1 \times \frac{5}{17} + 2 \times \frac{1}{51} = \frac{1}{3}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$





(II) 由频率分布直方图知, 甲设备产品中一、二、三级品的概率分别是 $\frac{1}{2}, \frac{13}{40}, \frac{7}{40}$, ...6分

设对剩余产品进行一一检验, 厂家支付费用为 y_1 元,

则 $y_1 = 50 \times 100 = 5000$ (元),7分

设不对剩余产品进行一一检验, 厂家支付费用为 y_2 元,

则 $y_2 = 50 \times 10 + 90 \times \frac{7}{40} \times 200 = 3650$ (元),8分

$\because y_1 > y_2$, \therefore 不对该箱中剩余产品进行一一检验.9分

(III) 设甲、乙设备生产该产品一件的平均利润分别为 y_3 元, y_4 元,

$\therefore y_3 = 500 \times \frac{1}{2} + 400 \times \frac{13}{40} + 200 \times \frac{7}{40} = 415$ (元),

$y_4 = 500 \times \frac{2}{5} + 400 \times \frac{1}{2} + 200 \times \frac{1}{10} = 420$ (元),11分

$\because y_3 < y_4$, \therefore 应选购乙设备.12分

21. (本小题满分 12 分)

解 (I) $f(x)$ 的定义域是 $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} + a$,1分

①当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在定义域上单调递增, 不可能有两个零点;2分

②当 $a < 0$ 时, 由 $f'(x) = \frac{1}{x} + a = 0$, 得 $x = -\frac{1}{a} > 0$,

当 $x \in (0, -\frac{1}{a})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在定义域上单调递增;

当 $x \in (-\frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在定义域上单调递减;

$\therefore x = -\frac{1}{a}$ 时, $f(x)$ 取得极大值.

因为 $f(x)$ 有两个零点, 所以 $f(-\frac{1}{a}) > 0$, 解得 $-1 < a < 0$,4分

$\because f(\frac{1}{e}) = \frac{a}{e} < 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{a})$ 有唯一实数根;





取 $x_0 = \frac{e}{(-a)^2} > -\frac{1}{a}$, 则 $f(x_0) = 1 + 2\ln(-\frac{1}{a}) + \frac{e}{a} + 1 < 2 + 2(-\frac{1}{a} - 1) + \frac{e}{a} = \frac{e-2}{a} < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 有唯一实数根. a 的取值范围是 $(-1, 0)$6 分

(II) $f(x) \leq xe^x$ 恒成立, 即 $xe^x \geq \ln x + ax + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立,

也就是 $a \leq e^x - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立,7 分

令 $g(x) = e^x - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$, 则 $g'(x) = e^x + \frac{\ln x}{x^2} = \frac{x^2 e^x + \ln x}{x^2}$

令 $h(x) = x^2 e^x + \ln x$, 则 $h'(x) = 2xe^x + x^2 e^x + \frac{1}{x} > 0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,8 分

而 $h(1) = e > 0$, $h(\frac{1}{e}) = \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^2} - 1 < 0$,

$\therefore \exists x_0 \in (\frac{1}{e}, 1)$ 使得 $h(x_0) = 0$, 即 $x_0^2 e^{x_0} + \ln x_0 = 0$,

$\therefore x_0 e^{x_0} = -\frac{1}{x_0} \ln x_0 = \frac{1}{x_0} \ln \frac{1}{x_0} = \ln \frac{1}{x_0} e^{\ln \frac{1}{x_0}}$ 令 $\varphi(x) = xe^x$,

在 $(0, +\infty)$ 上 $\varphi'(x) = (x+1)e^x > 0$, $\therefore \varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore x_0 = \ln \frac{1}{x_0}$,10 分

而在 $(0, x_0)$ 上, $h(x) < 0$, 即 $g'(x) < 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减,

在 $(x_0, +\infty)$ 上, $h(x) > 0$, 即 $g'(x) > 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore g(x)_{\min} = g(x_0) = e^{x_0} - \frac{\ln x_0}{x_0} - \frac{1}{x_0} = e^{\ln \frac{1}{x_0}} - \frac{-x_0}{x_0} - \frac{1}{x_0} = 1$, $\therefore a \leq 1$.

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty, 1]$12 分

22. (本小题满分 10 分)

解 (I) 由 $\begin{cases} x = \frac{t}{t+1}, \\ y = \frac{2t+1}{t+1}, \end{cases}$ 消去参数 t 得曲线 C_1 普通方程为 $x - y + 1 = 0$,2 分





由 $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\alpha, \\ y = 2\sin\alpha \end{cases}$ 消去参数 α 得曲线 C_2 的直角坐标为 $x^2 + y^2 - 4x = 0$,

得曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4\cos\theta$5 分

(II) 由 $\rho = 4\cos\theta$ 得点 P 坐标为 $P(4\cos\beta, \beta)$ ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$),

又直线 $x - y + 1 = 0$ 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta - \rho\sin\theta + 1 = 0$,

得点 $Q(\frac{1}{\cos\beta + \sin\beta}, \frac{\pi}{2} + \beta)$,7 分

$\therefore S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \cdot 4\cos\beta \cdot \frac{1}{\cos\beta + \sin\beta} = 1$,8 分

$\therefore \cos\beta = \sin\beta, \beta = \frac{\pi}{4}$,

$\therefore |OP| = 4\cos\beta = 2\sqrt{2}$10 分

【选修 4-5: 不等式选讲】

证明 (I) $(\frac{1}{a}-1)(\frac{1}{b}-1)(\frac{1}{c}-1) = \frac{1-a}{a} \cdot \frac{1-b}{b} \cdot \frac{1-c}{c} = \frac{b+c}{a} \cdot \frac{a+c}{b} \cdot \frac{a+b}{c}$

$\geq \frac{2\sqrt{bc}}{a} \cdot \frac{2\sqrt{ac}}{b} \cdot \frac{2\sqrt{ab}}{c} = 8$5 分

(II) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = (\frac{a+b+c}{b+c} - 1) + (\frac{a+b+c}{a+c} - 1) + (\frac{a+b+c}{a+b} - 1)$

$= \frac{1}{2}[(b+c) + (a+c) + (a+b)](\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}) - 3$

$\geq \frac{1}{2}[\sqrt{b+c} \cdot \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \sqrt{a+c} \cdot \frac{1}{\sqrt{a+c}} + \sqrt{a+b} \cdot \frac{1}{\sqrt{a+b}}]^2 - 3$

$= \frac{1}{2} \times 3^2 - 3 = \frac{3}{2}$10 分

注: 以上各题其他正确解法相应得分

