太原市 2020~2021 学年第一学期九年级期末考试

数学试卷解析

一、选择题（本大题含 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 若关于 x 的方程 $x^2-2x+a=0$ 的一个根为 1，则 a 等于（　　）

A．-3　　B．-1　　C．3　　D．1

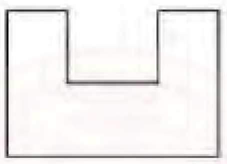
【考点】一元二次方程

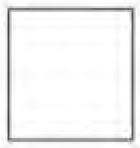
【难度星级】★

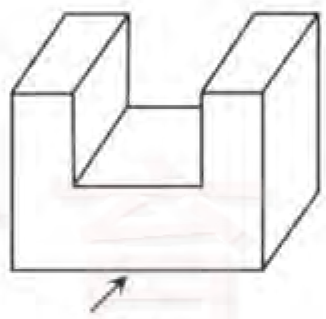
【答案】D

【解析】将方程的根 $x=1$ 代入原方程得：$1-2+a=0$，解得：$a=1$，故选 D.

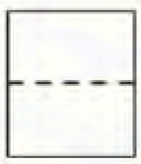
2. 下图所示的几何体的左视图是（　　）

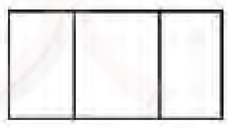
A．

B．



正面

C．

D．

【考点】三视图

【难度星级】★

【答案】C

【解析】从左边看得到的图形是左视图，其中看不见的画虚线．则图中所示几何体的左视图是 C.

3. 当 $x<0$ 时，反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ 的图象在（　　）

A．第三象限　　B．第二象限　　C．第一象限　　D．第四象限

【考点】反比例函数图象

【难度星级】★

【答案】A

【解析】∵反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ 中，$k=3>0$，图象过一、三象限；

当 $x<0$ 时，其图象在第三象限．

故选：A．

4. 太原市轨道交通 2 号线一期于 2020 年 12 月 26 日 12:00 开通初期运营，从此山西驶入地铁时代.全线 23 个站厅的设计，有机融合了“晋阳古八景”、“锦绣太原城”等文化元素，打造成一条亮丽的“地下艺术走廊”．在一幅比例尺为 1:200000 的设计图纸上，测得地铁线路全长约 11.8cm，则地铁线路的实际长度约为（　　）

A．5.9km　　B．11.8km　　C．23.6km　　D．57.2km

【考点】比例尺

【难度星级】★

【答案】C

【解析】根据比例尺，图上距离：实际距离=1:200000，则实际距离为 11.8×200000=23.6km，故选 C.

5. 下列四幅图，表示两棵树在同一时刻阳光下的影子是（　　）


A.


B.


C.


D.

【考点】平行投影

【难度星级】★

【答案】B

【解析】A、两棵小树的影子的方向相反，不可能为同一时刻阳光下影子，所以 A 选项错误；

B、在同一时刻阳光下，树高与影子成正比，所以 B 选项正确；

C、图中树高与影子成反比，而在同一时刻阳光下，树高与影子成正比，所以 C 选项错误.

D、两棵小树的影子的方向相反，不可能为同一时刻阳光下影子，所以 D 选项错误；

故选：B.

6. 一个不透明的袋中装有黄、白两种颜色的球共30个，这些球除颜色外，其余都相同．在不倒出来的情况下，为了估计袋中两种颜色球的个数，小亮和同学们进行了多次摸球试验，统计分析后发现摸到黄球的频率稳定在0.3．由此估计袋中黄球有（　　）

A．9个　　B．12个　　C．21个　　D．24个

【考点】利用频率估计概率

【难度星级】★

【答案】A

【解析】设袋子中黄球有 x 个，

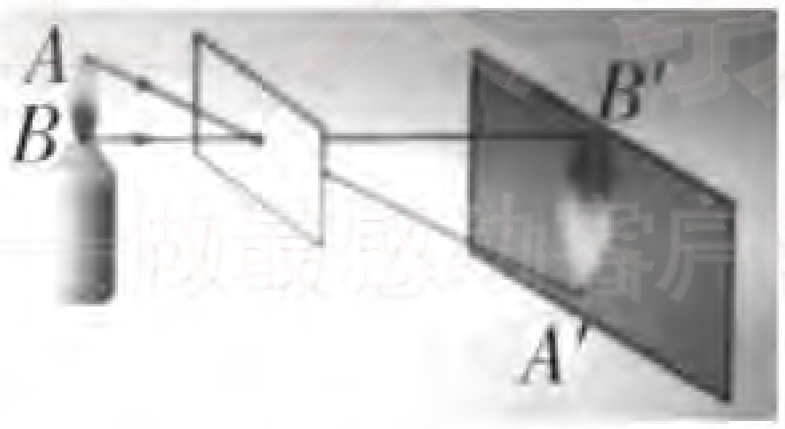
根据题意，得：$\frac{x}{30}=0.3$，

解得：$x=9$，

即布袋中黄球可能有9个，

故选：A．

7. 同学们在物理课上做“小孔成像”实验．如图，蜡烛与带“小孔”的纸板之间的距离为 l，当蜡烛火焰的高度 AB 是它在光屏上所成的像 $A'B'$ 高度的一半时，带“小孔”的纸板距离光屏（　　）



A．$3l$　　B．$2l$　　C．$\frac{2}{3}l$　　D．$\frac{1}{2}l$

【考点】相似三角形的应用

【难度星级】★

【答案】B

【解析】如图，记“小孔”为 O，

$\because AB \parallel A'B'$，

$\therefore \triangle ABO \backsim \triangle A'B'O$，

则 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{OB}{OB'}$，即 $\frac{1}{2}=\frac{l}{OB'}$，

解得：$OB'=2l$，

故答案为：B．

8. 已知 A（-1，y_1）、B（2，y_2）、C（6，y_3）三点都在反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象上，则 y_1、y_2、y_3 的大小关系是（　　）

A．$y_1<y_2<y_3$　　B．$y_3<y_2<y_1$　　C．$y_1<y_3<y_2$　　D．$y_2<y_1<y_3$

【考点】反比例函数的图象

【难度星级】★

【答案】C

【解析】∵反比例函数 $y=\frac{2}{x}$（$k>0$），

∴在每个象限内，y 随 x 的增大而减小，且当 $x>0$ 时，$y>0$，当 $x<0$ 时，$y<0$，

∵A（－1，y_1）、B（2，y_2）、C（6，y_3）三点都在该反比例函数的图象上，

∴$y_1<y_3<y_2$，

故选：C．

9. 在园林化城市建设期间，某市 2018 年绿化面积约为 1000 万平方米，2020 年绿化面积约为 1210 万平方米．如果近几年绿化面积的年增长率相同，则 2021 年绿化面积约为（　　）

A．1221 万平方米　B．1331 万平方米　　C．1231 万平方米　　D．1323 万平方米

【考点】一元二次方程的应用

【难度星级】★

【答案】B

【解析】设每年绿化面积的平均增长率为 x．可列方程：$1000(1+x)^2=1210$．

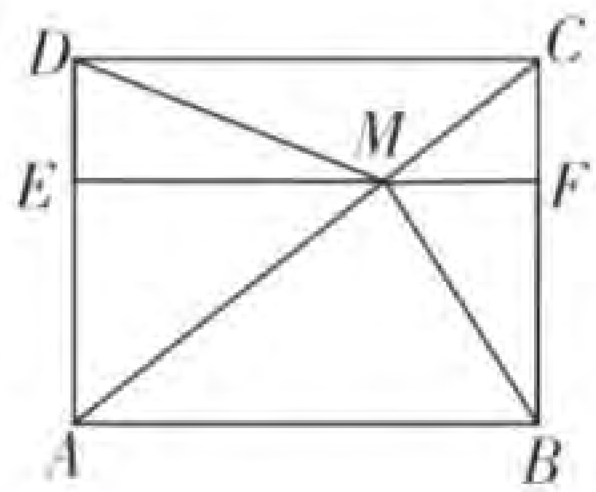
解方程，得：$x_1=0.1=10\%$，$x_2=-2.1$（不合题意，舍去）．

所以每年绿化面积的平均增长率为 10%，

则 2021 年绿化面积为：1210×（1+10%）＝1331（万平方米）．

故选 B．

10. 如图，矩形 $ABCD$ 中，过对角线 AC 上一点 M 作 $EF\parallel AB$，分别交 AD 于点 E，交 BC 于点 F，连接 DM、BM．已知 $DE=2$，$ME=5$．



A．△DEM 与△BFM 的面积和等于（　　）

A．15　　B．12　　C．10　　D．7

B．若 $AM=2MC$，则△ABM 的面积等于（　　）

A．10　　B．12.5　　C．12　　D．15

【考点】矩形的性质

【难度星级】★★

【答案】

A 题：C

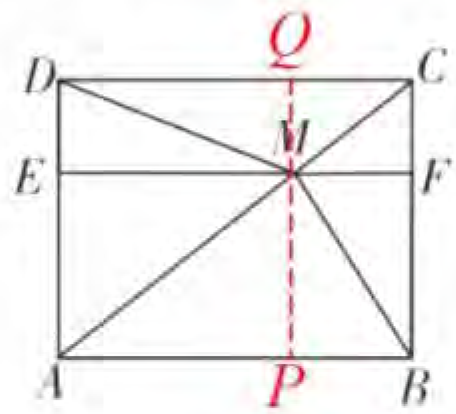
B 题：D

【解析】A 题：作 $PM\perp AB$ 于 P，交 DC 于 Q.

则四边形 $DEMQ$、四边形 $QMFC$、四边形 $AEMP$、四边形 $MPBF$ 都是矩形，

$\therefore S_{\triangle DEM}=S_{\triangle DQM}$，$S_{\triangle QCM}=S_{\triangle MFC}$，$S_{\triangle AEM}=S_{\triangle APM}$，$S_{\triangle MPB}=S_{\triangle MFB}$，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADC}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AMP}-S_{\triangle MCF}=S_{\triangle ADC}-S_{\triangle AEM}-S_{\triangle MQC}$，



$\therefore S_{\text{四边形}DEMQ}=S_{\text{四边形}MPBF}$，

$\because DE=CF=2$，

$\therefore S_{\triangle DEM}=S_{\triangle MFB}=\frac{1}{2}\times2\times5=5$，

$\therefore\triangle DEM$ 与 $\triangle BFM$ 的面积和等于 10，故选：C.

B 题：$\because AM=2MC$，

$\therefore EM=2MF$，$AE=2CF=2DE$，

$\therefore MF=2.5$，$AE=4$，

$S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}(EM+MF)\cdot AE=15$，故选 D .

二、填空题（本大题含 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分）

11. 一元二次方程 x（$x+2$）$=0$ 的根是__________.

【考点】解一元二次方程

【难度星级】★

【答案】$x_1=0$，$x_2=-2$.

【解析】$\because x$（$x+2$）$=0$，

$\therefore x=0$ 或 $x+2=0$，

$\therefore x_1=0$，$x_2=-2$.

故填：$x_1=0$，$x_2=-2$.

12. 如图，$\triangle A'B'C'$ 是 $\triangle ABC$ 以点 O 为位似中心经过位似变换得到的三角形，若 $\triangle A'B'C'$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积比是 4：9，则 OB' ：OB 等于____________.

【考点】位似变换

【难度星级】★

【答案】2:3

【解析】由位似变换的性质可知，$\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$.

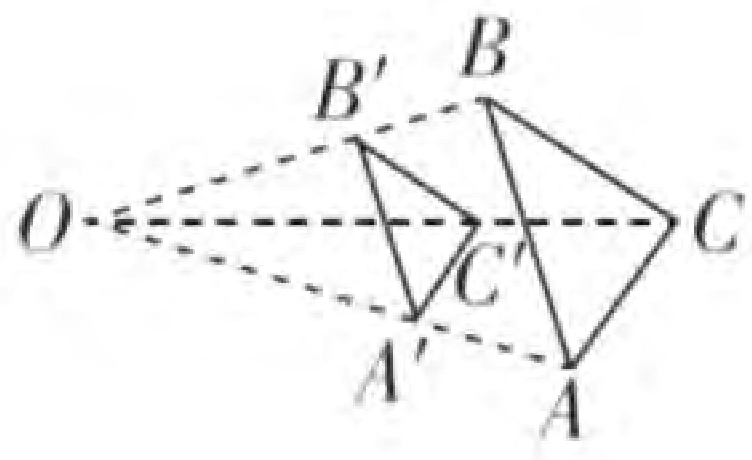
∵$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$的面积的比4：9，

∴$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$的相似比为2：3，

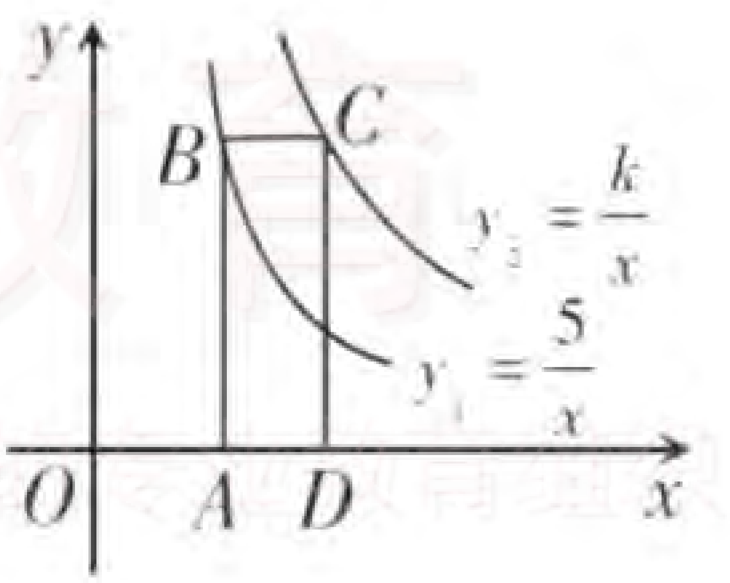
∵$A'B' \parallel AB$

$\frac{OB'}{OB}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{2}{3}$，

故答案为2:3



13. 如图，矩形$ABCD$的面积为4，顶点A和D在x轴的正半轴上，顶点B、C分别落在反比例函数$y_1=\frac{5}{x}$和$y_2=\frac{k}{x}$的图象上，则k的值等于______.



【考点】反比例函数k的几何意义

【难度星级】★

【答案】9

【解析】如图，延长CB交y轴于E，则根据反比例函数k的几何意义，矩形$ABEO$的面积为5，矩形$DCEO$的面积为$|k|$，所以矩形$ABCD$的面积为$|k|-5=4$，∵$k>0$，所以解得：$k=9$.

14. 一只蚂蚁在如图所示的树枝上寻觅食物，假定蚂蚁在每个“岔路口”都是随机选择一条路径，食物的位置在点M和点N附近，则它爬行一次能获得食物的概率是________.

【考点】列表法与树状图法

【难度星级】★

【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】由一只蚂蚁在如图所示的树枝上寻觅食物，假定蚂蚁在每个岔路口都会随机的选择一条路径，

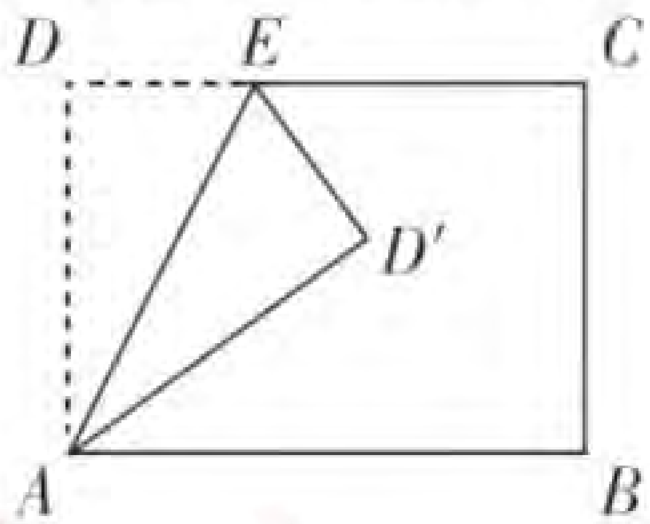
观察图可得：第一次选择，它有 3 种路径；第二次选择，每次又都有 2 种路径；

两次共 6 种等可能结果，其中获得食物的有 2 种结果，

∴获得食物的概率是 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$．

15. 如图，矩形纸片 $ABCD$ 中，$AD=6$，$AB=8$，点 E 在边 DC 上，将纸片沿 AE 折叠，点 D 落在点 D' 处．

从下面 A、B 两题中任选一题作答．



A．当点 D' 在对角线 AC 上时，DE 的长为________．

B．当点 D' 在对角线 DB 上时，DE 的长为________．

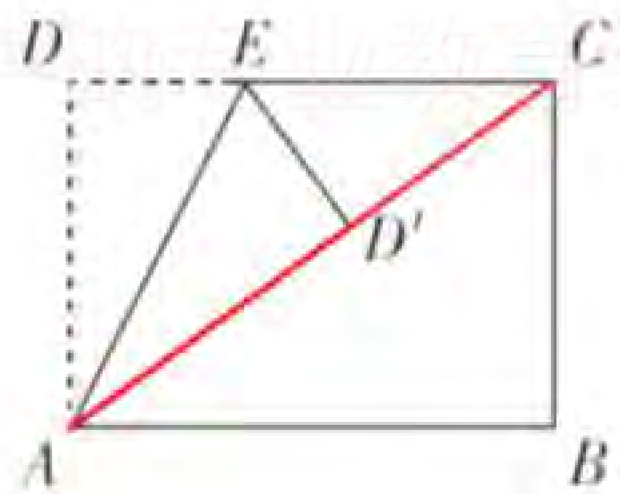
【考点】矩形折叠

【难度星级】★★

【答案】A 题：3；B 题：4.5

【解析】**A 题**：如图，当点 D' 在对角线 AC 上时，设 DE 为 x，则 $CE=8-x$，

∵在矩形 $ABCD$ 中，$AD=6$，$AB=8$，



∴对角线 $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=10$ ，

因为折叠，∴ $AD'=AD=6$ ， $D'E=DE=x$

∴ $CD'=AC-AD'=4$ ，

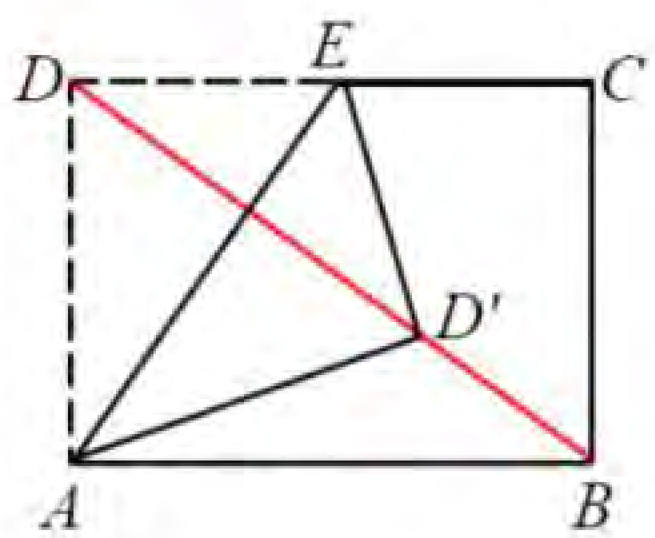
∴在 Rt△$CD'E$ 中， $\angle CD'E=90°$ ，

$CE=8-x$， $CD'=4$ ， $D'E=x$，

∴ $x^2+4^2=(8-x)^2$ ，

解得：$x=3$，∴$DE=3$．

B 题：



如图，当点 D' 在对角线 BD 上时，

∵$AE\perp DD'$（对应点连线被折痕垂直平分），

则易证：$\triangle ADE\backsim\triangle BAD$，

$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{AD}$ ，即：$\frac{6}{8}=\frac{DE}{6}$ ，

∴解得：$DE=4.5$

三、**解答题**（本大题含 8 个小题，共 55 分）解答应写出必要的文字说明、演算步骤或推理过程.

16. （本题 5 分）

解方程 $\left(x^2-1\right)^2-3\left(x^2-1\right)=0$，我们将 $\left(x^2-1\right)$ 作为一个整体，设 $x^2-1=y$，则原方程化 $y^2-3y=0$，解得 $y_1=0, y_2=3$. 当 $y=0$ 时，$x^2-1=0$，解得 $x=1$ 或 $x=-1$. 当 $y=3$ 时，$x^2-1=3$，解得 $x=2$ 或 $x=-2$. 所以原方程的解为 $x_1=1$，$x_2=-1$，$x_3=2$，$x_4=-2$.

模仿材料中解方程的方法，求方程：$\left(x^2+2x\right)^2-2\left(x^2+2x\right)-3=0$ 的解.

【考点】换元法解一元二次方程

【难度星级】★

【答案】$x_1=x_2=-1$，$x_3=-3$，$x_4=1$.

【解析】设 $x^2+2x=y$，则原方程化为 $y^2-2y-3=0$，

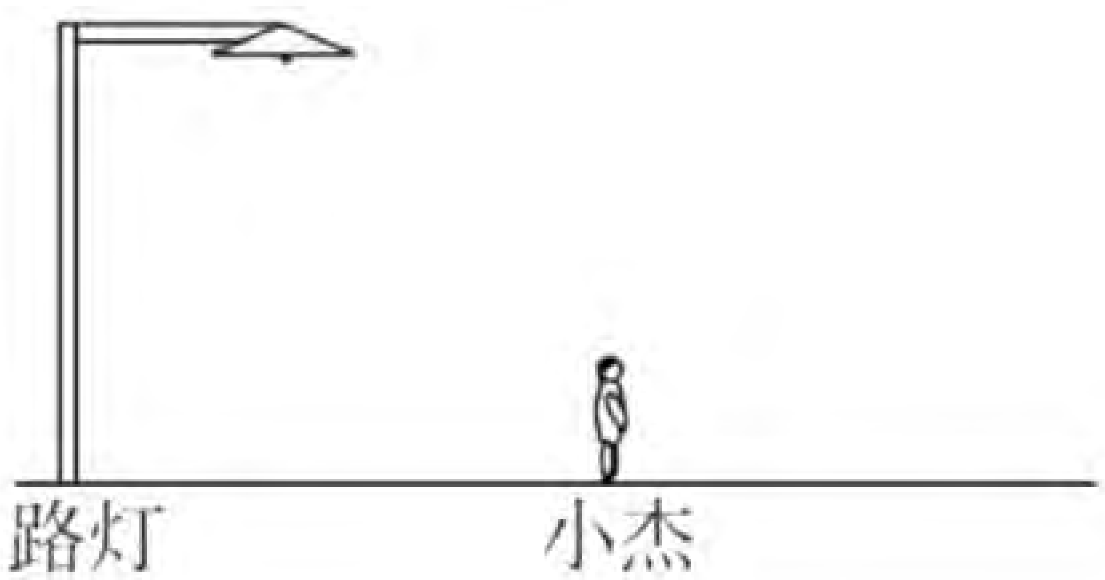
解得：$y_1=-1$，$y_2=3$，

当 $y=-1$ 时，$x^2+2x=-1$，解得 $x_1=x_2=-1$

当 $y=3$ 时，$x^2+2x=3$，解得 $x=-3$ 或 $x=1$.

所以，原方程的解为：$x_1=x_2=-1$，$x_3=-3$，$x_4=1$.

17. （本题 5 分）小杰与小明身高相同. 一天晚上，两人站在路灯下交流学习内容，小明恰好站在小杰头顶影子的位置. 请在图中分别画出此时小杰、小明的影子（用线段表示）.

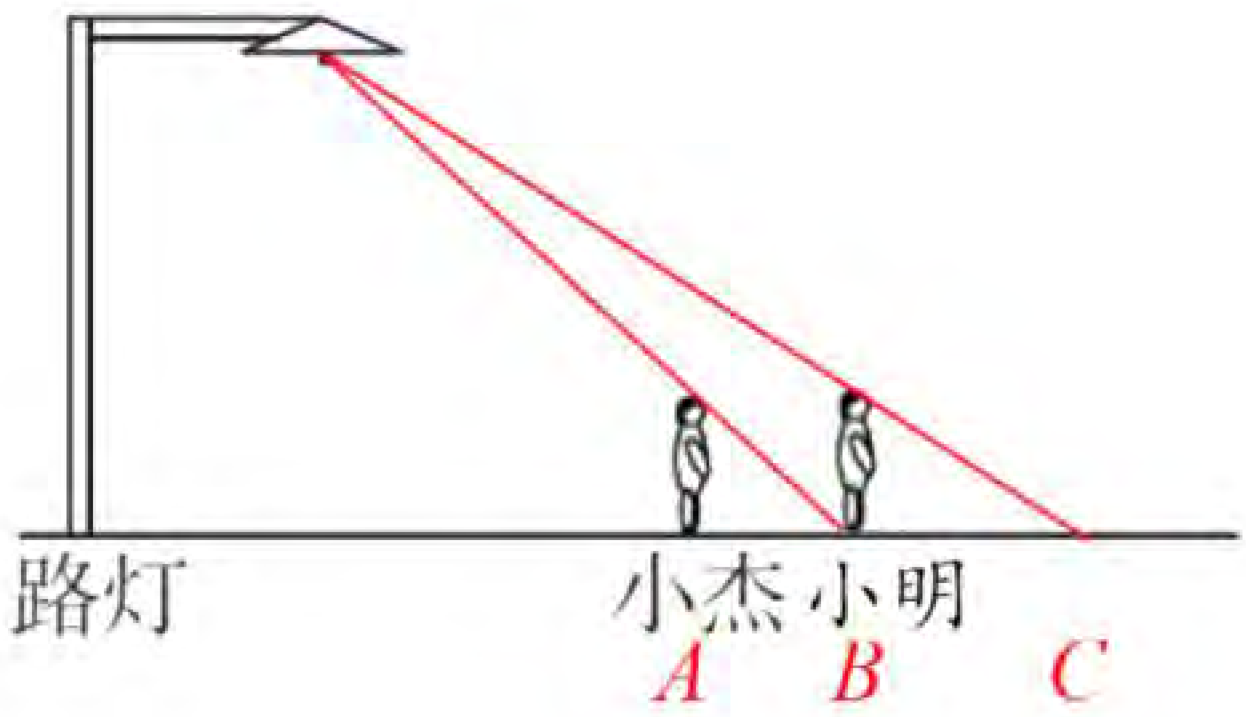


【考点】中心投影作图

【难度星级】★

【答案】见解析

【解析】如图所示，所以小杰的影子是线段 AB，小明的影子是线段 BC.



18. （本题 8 分）目前新冠病毒在我国部分地市零星散发，疫情防控形势仍然严峻．近日，校医室和学生会组织了“平安校园”问卷调查，从中选出了两名男生和两名女生，请他们通过校园广播向全校师生进行宣讲．由于时间限定，每次只能安排两名同学．学生会从这四名同学中随机抽取两名，进行第一次宣讲．请用画树状图或列表的方法，求第一次宣讲恰好是一名男生和一名女生的概率．

【考点】列表法与树状图法求概率

【难度星级】★

【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】

两名男生分别用男 1 和男 2 表示，两名女生分别用女 1 和女 2 表示，列表如下：

一＼二	男1	男2	女1	女2
男1		（男1，男2）	（男1，女1）	（男1，女2）
男2	（男2，男1）		（男2，女1）	（男2，女2）
女1	（女1，男1）	（女1，男2）		（女1，女2）
女2	（女2，男1）	（女2，男2）	（女2，女1）	

由表格可知，共有 12 种等可能的结果，其中一名男生和一名女生的结果有 8 种，

所以，$P_{(\text{第一次宣讲恰好是一名男生和一名女生})}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ ．

19. （本题 6 分）如图，在 Rt△ABC 中，$\angle BAC=90°$ ，点 E 是△ABC 的中线 AD 的中点，，过点 A 作 AF $/\!/ BC$ 交 BE 的延长线于点 F，连接 CF．求证：四边形 $ADCF$ 是菱形；

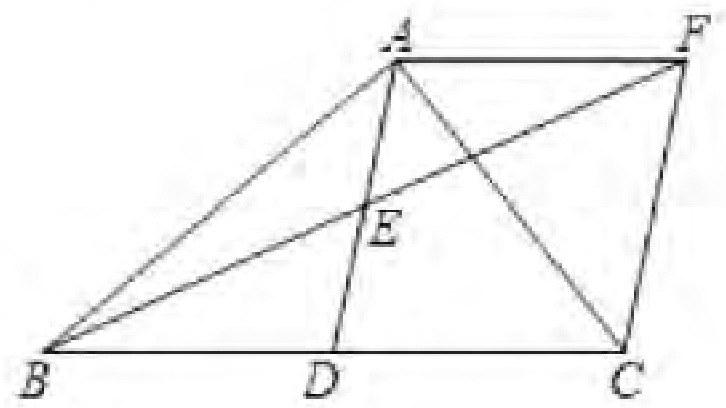
【考点】直角三角形斜边中线，菱形的判定

【难度星级】★

【答案】证明见解析

【解析】证明：∵Rt△ABC 中，$\angle BAC=90$，AD 是△ABC 的中线，

∴$AD=\frac{1}{2}BC=BD=CD$，



∵点 E 是 AD 的中点，

∴$AE=DE$，

∴$\angle AFE=\angle DBE$，

∵$AF/\!/ BC$，

∴$\angle AFE=\angle DBE$，

在△AFE 和△DBE 中，

$$\begin{cases}\angle AFE=\angle DBE\\ \angle AEF=\angle DEB\\ AE=DE\end{cases}$$

∴△AFE≌△DBE（AAS）

∴$AF=BD$，

又∵$BD=CD$，

∴$AF=CD$，且 $AF/\!/ BC$，

∴四边形 $ADCF$ 是平行四边形，

∵$AD=CD$，

∴四边形 $ADCF$ 是菱形．

20. （本题 7 分）

凌霄双塔（舍利塔和文峰塔）是太原现存最高的古建筑，她们犹如一双孪生姐妹，相映成趣．某数学“综合与实践”小组为了测量舍利塔的高度，他们利用双休日进行了实地测量，如示意图．

步骤一：把长为 2 米的标杆垂直立于地面点 C 处，当塔尖点 B 和标杆的端点 D 确定的直线交直线 AC 于点 E 时，测得 EC=3 米；

步骤二：将标杆沿直线 AC 向后平移到点 G 处，当塔尖点 B 和标杆的端点 H 确定的直线交直线 AC 于

点 F 时，测得 $FG=4$ 米，$CG=26.5$ 米.

下面是某同学根据测量结果，计算塔 AB 高度时的部分过程，请你补充完整.

解：∵$DC\perp AC$ 于点 C，$BA\perp AC$ 于点 A，

∴$\angle DCE=\angle BAE=90°$.

∵$\angle DEC=\angle BEA$，

∴△ECD∽△EAB.

∴$\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{EC}{EA}$.

∵$EC=3$，$CD=2$，

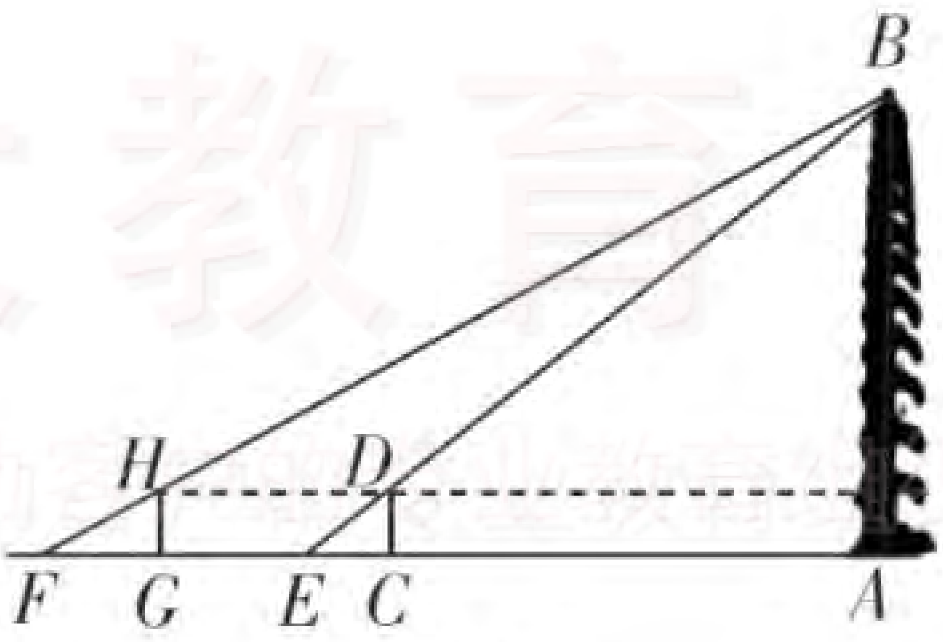
∴$EA=$____ AB .

同理可得 $FA=$____ AB .

【考点】相似三角形的应用

【难度星级】★

【答案】55



示意图

【解析】∵$DC\perp AC$ 于点 C，$BA\perp AC$ 于点 A，

∴$\angle DCE=\angle BAE=90°$.

∵$\angle DEC=\angle BEA$，

∴△ECD∽△EAB.

∴$\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{EC}{EA}$.

∵$EC=3$，$CD=2$，

∴$EA=\dfrac{3}{2}AB$.

同理可得 $FA=2AB$.

$$\because FA=FG+GC+EA-EC$$
$$=4+26.5+EA-3 ,$$
$$=EA+27.5$$

$\because EA=\dfrac{3}{2}AB$ ， $FA=2AB$ ，

$\therefore 2AB=27.5+\dfrac{3}{2}AB$ ，

解得：$AB=55$，

答：塔 AB 的高为 55 米.

21. （本题 8 分）

山西转型综合改革示范区的一工厂里，生产的某种产品按供需要求分为十个档次．若生产第一档次（最低档次）的产品，一天可生产 76 件，每件的利润 10 元，每提高一个档次，每件的利润增加 2 元，每天的产量减少 4 件．设产品的档次（每天只生产一个档次的产品）为 x，请解答下列问题．

（1）用含 x 的代数式表示：一天生产的产品件数为__________件，每件产品的利润为__________元．

（2）若该产品一天的总利润为 1080 元，求这天生产产品的档次 x 的值．

【考点】一元二次方程的应用

【难度星级】★

【答案】（1）$80-4x$；$2x+8$

（2）5

【解析】（1）生产件数为：$76-4(x-1)=80-4x$，每件的利润为：$10+2(x-1)=2x+8$；

（2）据题意可得 $(80-4x)(2x+8)=1080$

解得：$x_1=5$，$x_2=11$．

$\because x\le 10$，$\therefore x=11>10$，不符合题意，舍去．

$\therefore$ 当生产产品的档次是在第 5 档次时，一天的总利润为 1080 元．

22. （本题 8 分）

如图，点 A（1，6）和 B（n，2）是一次函数 $y_1=kx+b$ 的图象与反比例函数 $y_2=\dfrac{m}{x}$（$x>0$）的图象的两个交点．

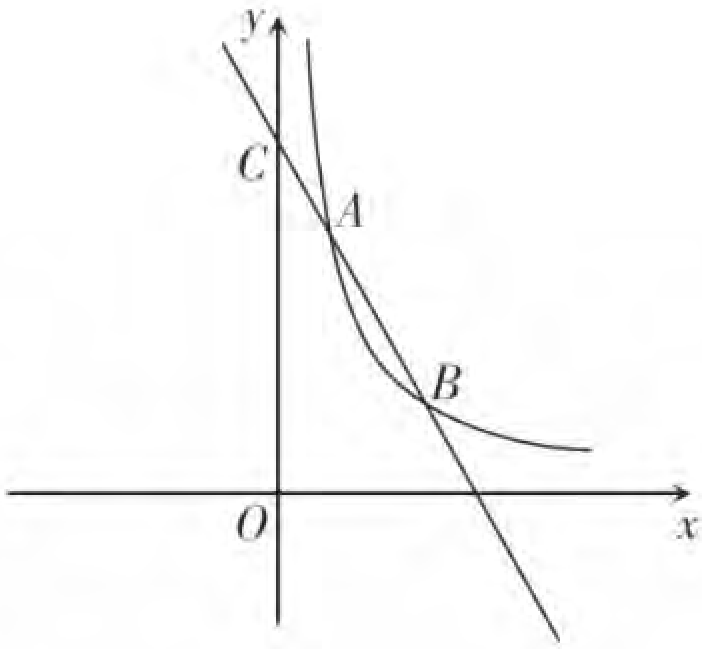
（1）求一次函数与反比例函数的表达式；

（2）设点 P 是 y 轴上的一个动点，当△PAB 的周长最小时，求点 P 的坐标；

（3）从下面 A、B 两题中任选一题作答．

A．在（2）的条件下，设点 D 是坐标平面内的一个动点，当以点 A、B、P、D 为顶点的四边形是平行四边形时，请直接写出符合条件的所有点 D 的坐标．

B.设直线 AB 交 y 轴于点 C，点 M 是坐标平面内一个动点，点 Q 在 y 轴上运动，以点 A、C、Q、M 为顶点的四边形能构成菱形吗？若能，请直接写出点 Q 的坐标；若不能，说明理由．



【考点】反比例函数综合

【难度星级】★★

【答案】

（1）$y_1=-2x+8$ ，$y_1=\dfrac{6}{x}$

（2）（0,5）

（3）A 题：$D(2,1),(4,3)$或$(-2,9)$

B 题：$Q(0,4),\left(0,8-\sqrt{5}\right),\left(0,8+\sqrt{5}\right)$或$\left(0,\dfrac{27}{4}\right)$

【解析】

（1）∵反比例函数 $y_2=\dfrac{m}{x}$（$x>0$）的图象过点 A（1，6），

∴ $6=\dfrac{m}{1}$ ，解得：$m=6$，

∴反比例函数的表达式是：$y_1=\dfrac{6}{x}$.

∵反比例函数 $y_2=\dfrac{m}{x}$（$x>0$）的图象过点 B（n，2），

∴ $2=\dfrac{6}{n}$ ，解得：$n=3$，

∴点 B 的坐标是（3，2），

将点 A 和 B 的坐标分别代入 $y_1=kx+b$，得：

$\begin{cases}6=k+b\\2=3k+b\end{cases}$ ，解得：$\begin{cases}k=-2\\b=8\end{cases}$ ，

∴一次函数的表达式为：$y_1=-2x+8$.

（2）如图，作 A 关于 y 轴的对称点 A'，连接 $A'B$ 交 y 轴于点 P，

连接 AP，则点 P 为符合条件的点。

∵A（1，6），∴ A' （-1，6），

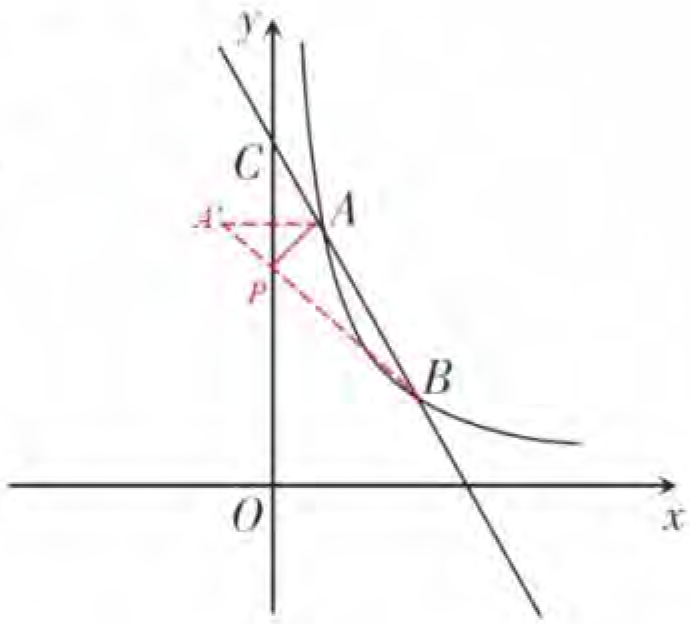
设直线 $A'B$ 的函数表达式为：$y=k_1x+b_1$，得：

$\begin{cases}6=-k_1+b_1\\2=3k_1+b_1\end{cases}$ ，解得：$\begin{cases}k_1=-1\\b_1=5\end{cases}$ ，

∴ $y=-x+5$

当 $x=0$ 时，$y=5$，

∴点 P 的坐标是：（0，5）.



（3）A 题：$D(2,1)$,$(4,3)$或$(-2,9)$

B 题：$Q(0,4)$,$\left(0,8-\sqrt{5}\right)$,$\left(0,8+\sqrt{5}\right)$或$\left(0,\frac{27}{4}\right)$

23. （本题 8 分）**综合与实践**

数学素材：

如图 1，正方形 $ABCD$ 中，AB=6cm，正方形 $EFGH$ 是一张透明的胶片，$EF>AB$.

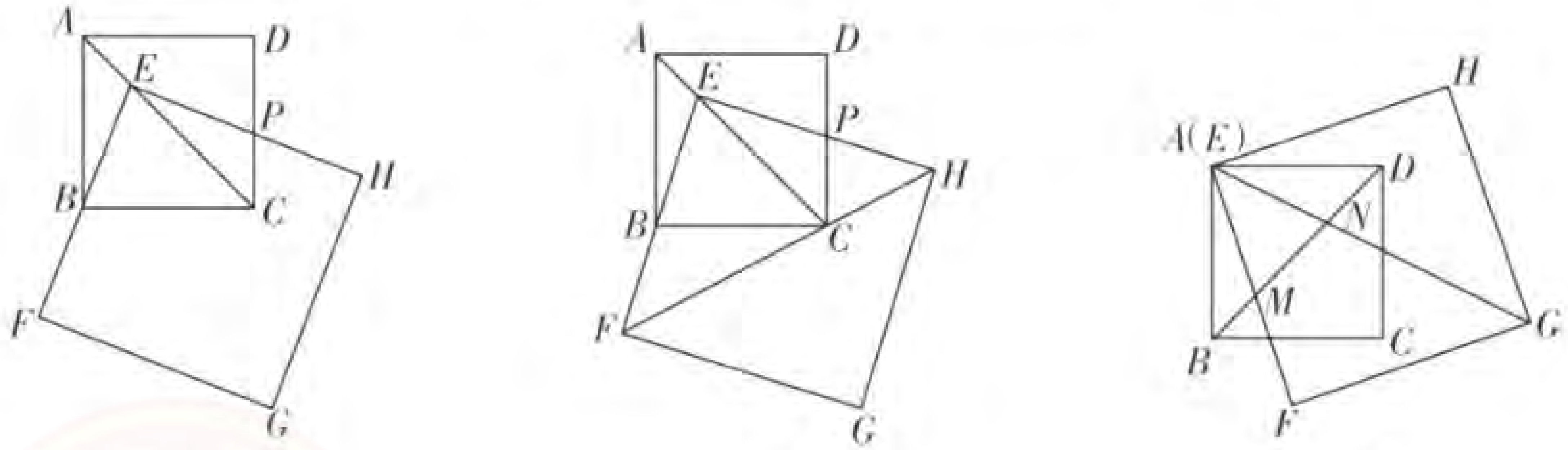


图 1　　图 2　　图 3

数学猜想：

正方形胶片的顶点 E 在正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上运动，EF 过点 B，EH 与射线 DC 交于点 P，猜想线段 BE 与线段 EP 之间的数量关系，并借助图 1 说明理由；

数学探究一：

如图 2，正方形胶片的顶点 E 在 AC 上，EF 过点 B，$AE=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm，对角线 FH 过点 C，请直接写出胶片的边长；

数学探究二：

如图 3，正方形胶片的顶点 E 与正方形 $ABCD$ 的顶点 A 重合，连接 BD 与边 EF，对角线 AG 分别交于点 M、N，若 $DN=2\sqrt{2}$ cm，求 AN 和 BM 的长.

【考点】正方形综合

【难度星级】★★★

【答案】

数学猜想：$BE=EP$，理由见解析；

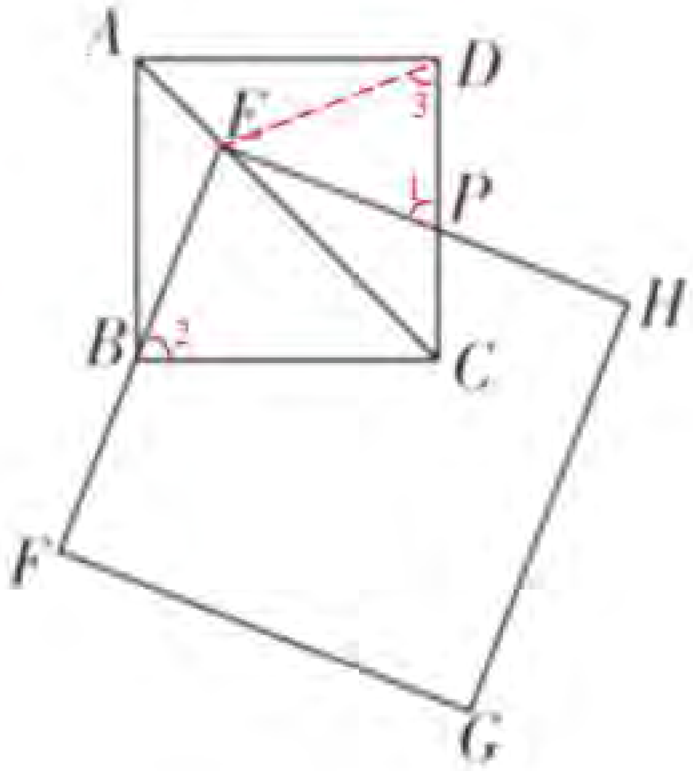
数学探究一：$\frac{27\sqrt{10}}{10}$

数学探究二：$AN=2\sqrt{5}$，$BM=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

【解析】

（1）数学猜想：$BE=EP$，理由如下：

如图，连接 ED，



∵四边形 ABCD 是正方形，

∴ $BC=CD=AB$ ，$\angle ABC=\angle BCD=90°$ ，

∴ $\angle BCA=\frac{1}{2}(180°-\angle ABC)=45°$ ，

∴ $\angle BCA=\angle DCA=45°$ ，

在$\triangle BCE$ 和$\triangle DCE$ 中，

∵ $BC=CD$ ，$\angle BCA=\angle DCA$ ，$CE=CE$ ，

∴$\triangle BCE\cong\triangle DCE$.

∴ $BE=DE$ ，$\angle 2=\angle 3$

∵四边形 $EFGH$ 为正方形，

∴ $\angle FEH=90°$ ，

在四边形 $BCPE$ 中，

$\angle 2+\angle CPE=360°-\angle BCP-\angle BEP=180°$ ，

∵ $\angle 1+\angle CPE=180°$ ，

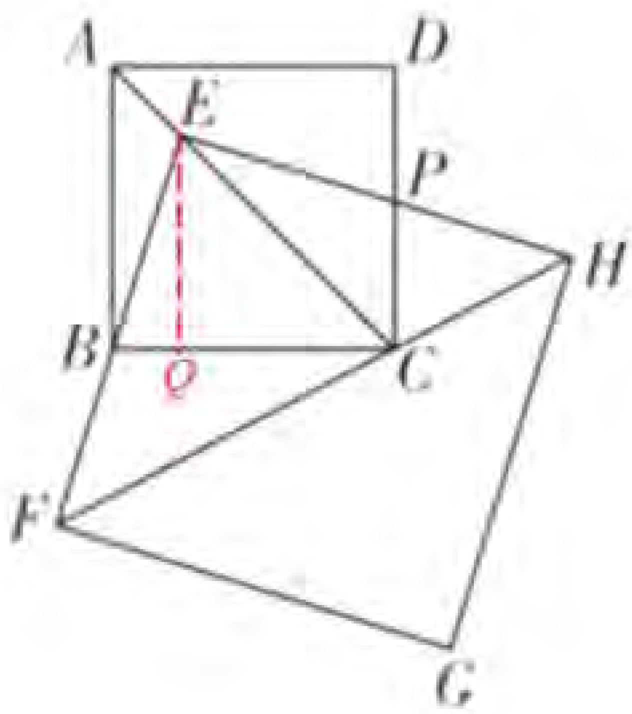
∴ $\angle 2=\angle 1$ ，

∵ $\angle 2=\angle 3$，

∴ $\angle 1=\angle 3$，∴$ED=EP$，

∴ $BE=EP$ ，

数学探究一：



∵ $AE=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$AC=6\sqrt{2}$，

∴ $CE=\frac{9\sqrt{2}}{2}$，

∵ $ACB=\angle CFE=45°$，$\angle FEC=\angle CEB$

∴$\triangle CEB\backsim\triangle FEC$

∴ $\frac{EC}{EF}=\frac{BE}{EC}$，即：$EC^2=EF\cdot BE$ ，

过 E 作 $EQ\perp BC$ 交 BC 于点 Q，

∵$\triangle ECQ$ 是等腰直角三角形，

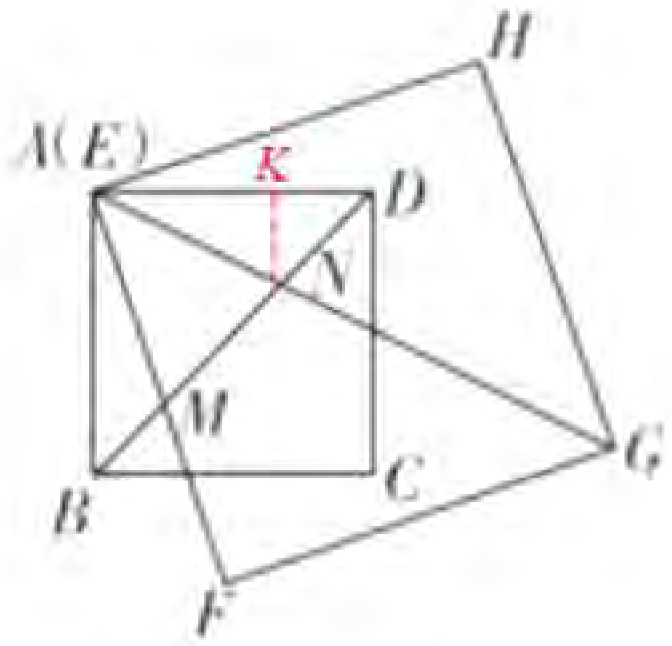
∴ $EQ=QC=\frac{9}{2}$，∴ $BQ=6-\frac{9}{2}=\frac{3}{2}$ ，

∴在 Rt$\triangle BQE$ 中，$BE=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{10}$

$\therefore\ EC^2=EF\times BE$ ，$\left(\dfrac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2=EF\times\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$ ，

$\therefore EF=\dfrac{27\sqrt{10}}{10}$

数学探究二： 如图，过点 N 作 $NK\perp AD$ 于 K，



$\because$在正方形 $ABCD$ 中，$AB=6$，

$\therefore AD=AB=6$，$\angle BAD=90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABD=\angle ADB=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle BAD)=45^\circ$ ，

同理可得，$\angle MAN=45^\circ$ ，

$\therefore$在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$ ，

$\because DN=2\sqrt{2}$，$\therefore BN=BD-DN=4\sqrt{2}$ ，

$\because NK\perp AD$ 于点 K，$\therefore \angle DKN=\angle AKN=90^\circ$

$\therefore \angle DNK=90^\circ-\angle ADB=45^\circ$ $\therefore DK=KN$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DKN$ 中，$DK^2+KN^2=DN^2$

$\therefore 2KN^2=(2\sqrt{2})^2$

解得：$KN=2$，$\therefore DK=KN=2$ ，

$\therefore AK=AD-KD=6-2=4$ ，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AKN$ 中，$AN=\sqrt{AK^2+KN^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

$\because \angle MAN=\angle ABD=45^\circ$，$\angle ANM=\angle ANB$，

$\therefore \triangle AMN\sim\triangle BAN$，$\therefore \dfrac{AN}{BN}=\dfrac{MN}{AN}$，即：$BN\cdot MN=AN^2$

$\because AN=2\sqrt{5}$，$BN=4\sqrt{2}$，$\therefore 4\sqrt{2}\cdot MN=(2\sqrt{5})^2$ ，

$\therefore MN=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ ，

$\therefore BM=BN-MN=4\sqrt{2}-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ，

$\therefore AN=2\sqrt{5}$，$BM=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$