2020-2021 学年第一学期高一年级期末考试

数学 参考答案与评分建议

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	C	D	A	C	B	A	A	D	B	D

二、填空题 13. $\frac{1}{2}$； 14. 1； 15. 10^{-3}； 16. ②③.

三、解答题

17.（1）原式= $\log_9 \frac{4\times 8}{\frac{32}{9}}$ ……………………3 分

$=\log_9 9=1$. ……………………4 分

（2）原式 $=\lg 10-9+1$ ……………………7 分

$=-7$ ……………………8 分

18.（1）由已知 $\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=3$，

化简整理得 $-2\sin\theta=4\cos\theta$， ……………………3 分

故 $\tan\theta=-2$. ……………………5 分

（2）原式 $=\frac{-\cos\theta\sin\theta-\cos^2\theta}{1+\sin^2\theta}$ ……………………7 分

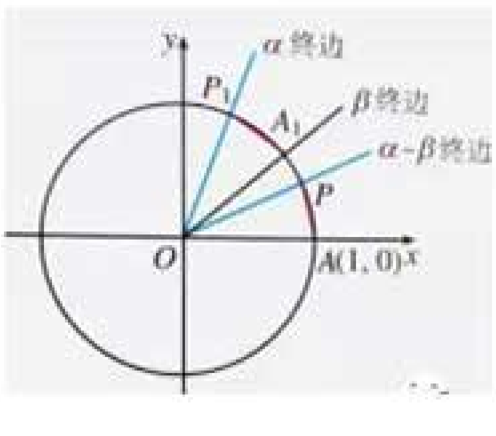
$=\frac{-\cos\theta\sin\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}$ ……………………8 分

$=\frac{-\tan\theta-1}{2\tan^2\theta+1}=\frac{1}{9}$. ……………………10 分

19.（1）解：两角差的余弦公式为：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ …2 分

证明：作角 $\alpha-\beta$，它的终边与单位圆相交于点 P（$\cos(\alpha-\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$）.

连接 Q_1P_1，QP.



若把扇形 OQP 绕着点 O 旋转β角，则点 Q，P 分别与点 Q_1，P_1 重合.

根据圆的旋转对称性可知，$\overset{\frown}{QP}$ 与 $\overset{\frown}{Q_1P_1}$ 重合，从而 $\overset{\frown}{QP}=\overset{\frown}{Q_1P_1}$，所以 $QP=Q_1P_1$.

根据两点间的距离公式，得

$[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha-\beta)=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$，

化简得 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

当$\alpha=2k\pi+\beta$（$k\in\mathbf{Z}$）时，容易证明上式仍然成立. ……………………5 分

（2）$\sin(\alpha-\beta)=-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha-\beta\right)$ ……………………7 分

$=-\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\beta\right]$ ……………………8 分

$=-[-\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta]$

$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

……………………10 分

20（甲）（1） 解：$\because f(x)=\log_2(\dfrac{k}{x+1}-1)$ 是奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$，

$\therefore f(-x)+f(x)=\log_2(\dfrac{k-1+x}{-x+1})+\log_2(\dfrac{k-1-x}{x+1})=\log_2\dfrac{(k-1)^2-x^2}{1-x^2}=0$，

解得：$k=2$ 或 $k=0$（舍）. ……………………5 分

（2）由（1）得，$f(x)=\log_2(\dfrac{1-x}{x+1})$，令 $\dfrac{1-x}{x+1}>0$，解得：$-1<x<1$，

故定义域为 $\{x|-1<x<1\}$. ……………………10 分

（乙）（1） 解：$\because f(x)=\log_2(\dfrac{k}{x+1}-1)$ 是奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$，

$\therefore f(-x)+f(x)=\log_2(\dfrac{k-1+x}{-x+1})+\log_2(\dfrac{k-1-x}{x+1})=\log_2\dfrac{(k-1)^2-x^2}{1-x^2}=0$，

解得：$k=2$ 或 $k=0$（舍）. ……………………4 分

（2）由（1）得 $f(x)=\log_2(\dfrac{1-x}{x+1})$，因为 $f(t)=\log_2 t$ 为增函数，又 $t=\dfrac{1-x}{x+1}$，

即 $t=\dfrac{2}{x+1}-1$ 在 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{5}\right)$ 上为减函数，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{5}\right)$ 上为减函数；

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 7$ 分

又 $f(-\frac{1}{3})=\log_2 2=1, f(\frac{3}{5})=\log_2\frac{1}{4}=-2$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{3},\frac{3}{5}\right)$ 上的值域为 $(-2,1)$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10$ 分

21（甲）.

（1）$\because f(x)=\sqrt{3}\left(\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}\right)-\sin 2x$

$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2$ 分

因为 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$，所以 $\frac{\pi}{3}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{6}$， $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3$ 分

所以 $\frac{1}{2}\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1$，且 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=1$，

即函数 $y=f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值为1，最小值为 $\frac{1}{2}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 5$ 分

（2）因为不等式 $|f(x)-m|<1$ 在 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立，

所以不等式 $-1+m<f(x)<1+m$ 在 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立， $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 6$ 分

又 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值与最小值分别为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$， $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 7$ 分

所以 $\begin{cases} m-1<-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1+m>\frac{1}{2}\end{cases}$， $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 9$ 分

解得 $-\frac{1}{2}<m<1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以实数 m 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{2},1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10$ 分

21（乙）.（1）$f\left(x\right)=\sqrt{3}\left(\sin 2\omega x\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2\omega x\sin\frac{\pi}{6}\right)-\sin 2\omega x$

……………………2 分

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\omega x+\frac{1}{2}\sin 2\omega x=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$

由于函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π，所以 $\omega=1$，

$\therefore f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. ……………………3 分

因为 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$，所以 $\frac{\pi}{3}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{6}$，

所以 $\frac{1}{2}\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1$，且 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=1$，

即函数 $y=f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值为1，最小值为 $\frac{1}{2}$. ……………………5 分

（2）当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时，$2\omega x+\frac{\pi}{3}\in(2\omega\pi+\frac{\pi}{3},4\omega\pi+\frac{\pi}{3})$， ……………………6 分

由于 $f(x)$ 在区间 $\left(\pi，2\pi\right)$ 内没有零点，

因此 $(2\omega\pi+\frac{\pi}{3},4\omega\pi+\frac{\pi}{3})\subseteq(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 或 $(2\omega\pi+\frac{\pi}{3},4\omega\pi+\frac{\pi}{3})\subseteq(2k\pi-\pi,2k\pi)$，

……………………8 分

$$\begin{cases}2\omega\pi+\frac{\pi}{3}\ge 2k\pi\\4\omega\pi+\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\pi\end{cases}\text{或}\begin{cases}2\omega\pi+\frac{\pi}{3}\ge 2k\pi-\pi\\4\omega\pi+\frac{\pi}{3}\le 2k\pi\end{cases},$$

解得 $-\frac{1}{6}\le\omega\le\frac{1}{6}$ 或 $\frac{1}{3}\le\omega\le\frac{5}{12}$，

又 $\omega>0$，所以 ω 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{6}\right]\cup\left[\frac{1}{3},\frac{5}{12}\right]$. ……………………10 分