太原市 2021 年高三年级模拟考试（二）
数学试题（文）参考答案及评分标准

一．选择题：A D C C B B A D C B C C

二．填空题：13. 1　　14. $\frac{7}{9}$　　15. -2　　16. $[\frac{9}{4},3)$

三．解答题：

17.（Ⅰ）证明：在ΔABD中，$S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，$\therefore AD=1+\sqrt{2}$，……3 分

由余弦定理得$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle BAD=3$，$\therefore BD=\sqrt{3}$；……6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$BD=\sqrt{3}$，设$\angle BDC=\alpha(0<\alpha<60°)$，

由$\angle BCD=120°$和正弦定理得$\frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{CD}{\sin(60°-\alpha)}=\frac{BD}{\sin 120°}=2$，………8 分

$\therefore BC+CD=2[\sin\alpha+\sin(60°-\alpha)]=2\sin(\alpha+60°)$，………10 分

$\because 0<\alpha<60°$，$\therefore\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin(\alpha+60°)\le 1$，$\therefore\sqrt{3}<BC+CD\le 2$，

$\therefore BC+CD$的取值范围为$(\sqrt{3},2]$．………12 分

18 解：(Ⅰ)由频率分布直方图得该样本中垃圾量为$[4,6)$，$[6,8)$，$[8,10)$，$[10,12)$，$[12,14)$，$[14,16)$，$[16,18]$的频率分别为$0.08,0.1,0.2,0.24,0.18,0.12,0.08$，

$\bar{x}=5\times0.08+7\times0.10+9\times0.20+11\times0.24+13\times0.18+15\times0.12+17\times0.08=11.04\approx 11$，

所以当天这 50 个社区垃圾量的平均值为11吨；………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得该样本中“超标”社区的频率为$0.12+0.08=0.2$，

所以这 200 个社区中“超标”社区的概率为0.2，

所以这 200 个社区中“超标”社区的个数为$200\times0.2=40$；………7 分

（Ⅲ）由题意得样本中“超标”社区共有$50\times(0.12+0.08)=10$个，其中垃圾量为$[14,16)$的社区有$50\times0.12=6$个，垃圾量为$[16,18)$的社区有$50\times0.08=4$个，按垃圾量用分层抽样抽取的 5 个社区中，垃圾量为$[14,16)$的社区有3个，分别记为a,b,c；垃圾量为$[16,18)$的社区有 2 个，分别记为d,e，………9 分

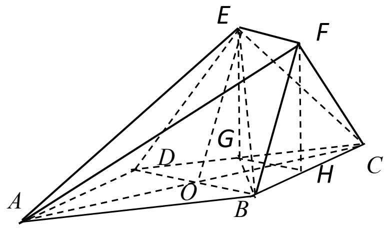
从中选取 2 个的基本事件为(a,b)，(a,c)，(a,d)，(a,e)，(b,c)，(b,d)，(b,e)，(c,d)，(c,e)，(d,e)，共 10 个；其中所求事件“至少有 1 个垃圾量为$[16,18]$的社区”为(a,d)，(a,e)，(b,d)，(b,e)，(c,d)，(c,e)，(d,e)，共 7 个；

所以至少有 1 个垃圾量为$[16,18)$的社区的概率为$p=0.7$．………12 分

19.（Ⅰ）证明：设点G,H分别是CD,CB的中点，连结EG,FH,GH，

则$GH\,//\,DB$，且$DB=2GH$，$\because EF\,//\,DB$，且$DB=2EF$，$\therefore EF\,//\,GH$，且$EF=GH$，

$\therefore EFHG$ 平行四边形，$\therefore FH // EG$，　　………1 分



$\because CE = DE$，$\therefore EG \perp CD$，

$\because$ 平面 $CDE \perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore EG \perp$ 平面 $ABCD$，　　………3 分

$\therefore FH \perp$ 平面 $ABCD$，$\because FH \subset$ 平面 BCF，

$\therefore$ 平面 $BCF \perp$ 平面 $ABCD$；　　………6 分

（Ⅱ）连结 BG，由（Ⅰ）得 $EG \perp$ 平面 $ABCD$，

$\because$ 直线 BE 与平面 $ABCD$ 的所成角为 $45°$，$\therefore \angle EBG = 45°$，$\therefore BG = EG$，　………8 分

设 $AC \cap BD = O$，连结 OE，易得 $OEFB$ 是平行四边形，$\therefore OE // BF$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，且 $\angle BAD = 60°$，

$\therefore \Delta BCD$ 是边长为 2 的等边三角形，$\therefore BG = \sqrt{3}$，

$\therefore V_{A-CEF} = V_{F-ACE} = V_{B-ACE} = V_{E-ABC} = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot EG = \dfrac{1}{3} S_{\Delta BCD} \cdot EG = 1$．　　………12 分

20.（Ⅰ）证明：当 $a = 1$ 时，令 $h(x) = f(x) - g(x) = x + 1 - \sin x - \cos x$，$x \in \mathrm{R}$，

则 $h'(x) = 1 - \cos x + \sin x$，

（1）当 $0 \le x < \dfrac{\pi}{4}$ 时，则 $h'(x) = 1 - \cos x + \sin x > 0$，

$\therefore h(x)$ 在 $[0, \dfrac{\pi}{4})$ 上单调递增，$\therefore h(x) \ge h(0) = 0$，$\therefore f(x) \ge g(x)$，　　………3 分

（2）当 $x \ge \dfrac{\pi}{4}$ 时，$\therefore h(x) = x + 1 - \sqrt{2}\sin(x + \dfrac{\pi}{4}) \ge \dfrac{\pi}{4} + 1 - \sqrt{2} > 0$，$\therefore f(x) \ge g(x)$；

综上所述，当 $a = 1$ 时，不等式 $f(x) \ge g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立；　　………5 分

（Ⅱ）令 $t(x) = f(x) - g(x) = ax + 1 - \sin x - \cos x$，$x \ge -\dfrac{\pi}{4}$，

则 $t'(x) = a - \cos x + \sin x$，

（1）当 $x \ge 0$ 时，由题意得 $t(x) \ge 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立，

$\because t(0) = 0$，$\therefore t'(0) = a - 1 \ge 0$，$\therefore a \ge 1$；

当 $a \ge 1$ 时，由（Ⅰ）得 $t(x) = ax + 1 - \sin x - \cos x \ge x + 1 - \sin x - \cos x \ge 0$，

$\therefore$ 当 $t(x) \ge 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立时 $a \ge 1$；　　………8 分

（2）当 $-\dfrac{\pi}{4} \le x < 0$ 时，由题意得 $t(x) \ge 0$ 在 $[-\dfrac{\pi}{4}, 0)$ 上恒成立，

$\because t(0) = 0$，$\therefore t'(0) = a - 1 \le 0$，$\therefore a \le 1$，

当 $a \le 1$ 时，$t(x) = ax + 1 - \sin x - \cos x \ge x + 1 - \sin x - \cos x$，

由（Ⅰ）得 $h'(x) = 1 - \cos x + \sin x = 1 + \sqrt{2}\sin(x - \dfrac{\pi}{4}) < 0$，

$\therefore h(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4},0)$ 上单调递减，$\therefore h(x)\ge h(0)=0$，$\therefore t(x)\ge 0$，

$\therefore$ 当 $t(x)\ge 0$ 在 $[-\frac{\pi}{4},0)$ 上恒成立时 $a\le 1$； ………11 分

综上所述，实数 a 取值的集合为 $\{1\}$． ………12 分

21 解：（Ⅰ）设 $D(\frac{2}{3},y_0)$，由题意得 $\begin{cases} k_{DA}\cdot k_{DB}=\dfrac{y_0}{\frac{2}{3}+a}\cdot\dfrac{y_0}{\frac{2}{3}-a}=-\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{2}\times 2a\times|y_0|=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}, \\ \dfrac{4}{9a^2}+\dfrac{{y_0}^2}{b^2}=1, \end{cases}$ ………3 分

$\therefore\begin{cases} b^2=1, \\ a^2=4, \end{cases}$ $\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$； ………5 分

（Ⅱ）假设存在这样的点 N，设直线 PM 与 x 轴相交于点 T $(x_0,0)$，由题意得 $TP\perp BQ$，

由（Ⅰ）得 $B(2,0)$，设 $P(\frac{2}{3},t)$，$Q(x_1,y_1)$，由题意可设直线 AP 的方程为 $x=my-2$，

由 $\begin{cases} x=my-2, \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $(m^2+4)y^2-4my=0$，$\therefore y_1=\frac{4m}{m^2+4}$ 或 $y_1=0$（舍去），$x_1=\frac{2m^2-8}{m^2+4}$， ……7 分

$\because \frac{2}{3}=mt-2$，$\therefore t=\frac{8}{3m}$，

$\because TP\perp BQ$，$\therefore \overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{BQ}=(\frac{2}{3}-x_0)(x_1-2)+ty_1=0$，

$\therefore x_0=\frac{2}{3}+\frac{ty_1}{x_1-2}=\frac{2}{3}+\frac{8}{3m}\cdot\frac{4m}{m^2+4}\cdot\frac{m^2+4}{-16}=0$， ………10 分

$\therefore$ 直线 PM 过定点 T $(0,0)$，

$\therefore$ 存在定点 $N(1,0)$，使得 $|MN|=1$． ………12 分

22 解：（Ⅰ）将 $\begin{cases} x=\dfrac{2\sqrt{2}t}{t^2+1}, \\ y=\dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases}$ 的参数 t 消去得曲线 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1(y\ne 1)$， ……3 分

$\because \rho\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore \rho\cos\theta-\rho\sin\theta-1=0$，

由 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ 可得直线 l 的直角坐标方程为 $x-y-1=0$； ………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得曲线 C 的参数方程可表示为 $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta, \\ y=\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数）$(\theta\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z)$，

设 $A(\sqrt{2}\cos\theta,\sin\theta)$，则点 A 到直线 l 的距离 $d=\frac{|\sqrt{2}\cos\theta-\sin\theta-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，　………7 分

$\therefore \sqrt{2}\cos\theta-\sin\theta=0$ 或 $\sqrt{2}\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{3}\cos(\theta+\varphi)=2$（其中 $\tan\varphi=\sqrt{2}$）（舍去），

$\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\therefore \cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，

当 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$A(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3})$；当 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$A(-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3})$．　………10 分

23 解：（Ⅰ）当 $m=1$ 时，原不等式为 $|x+1|+|2x-1|\le 6$，

$\begin{cases} x<-1, \\ -(x+1)-(2x-1)\le 6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1\le x\le\frac{1}{2}, \\ x+1-(2x-1)\le 6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x>\frac{1}{2}, \\ x+1+2x-1\le 6, \end{cases}$　………3 分

$\therefore -2\le x<-1$ 或 $-1\le x\le\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}<x\le 2$

$\therefore$ 原不等式 $f(x)\le 6$ 的解集为 $\{x|-2\le x\le 2\}$；　………5 分

（Ⅱ）由题意得 $f(x)=\begin{cases} -3x-m^2+m, x<-m^2, \\ -x+m^2+m, -m^2\le x\le\frac{m}{2}, \\ 3x+m^2-m, x>\frac{m}{2}, \end{cases}$

$\therefore f(x)_{\min}=f(\frac{m}{2})=m^2+\frac{1}{2}m=\frac{3}{2}$，$\therefore m=1$ 或 $m=-\frac{3}{2}$（舍去），　………7 分

$\therefore a+b=1$，令 $\begin{cases} a=\cos^2\theta, \\ b=\sin^2\theta \end{cases}$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$，

则 $\sqrt{a}+2\sqrt{b}=\cos\theta+2\sin\theta=\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)\le\sqrt{5}$，

当 $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$ $(0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, 且 $\tan\varphi=\frac{1}{2})$ 时，上述不等式取等号．　………10 分

注：以上各题其他解法，请酌情给分．