太原市 2021 年高三年级模拟考试（一）
数学试题（文）参考答案及评分标准

一．选择题：

1.A　2.D　3.B　4.A　5.C　6.C　7.B　8.D　9.A　10.B　11.A　12.D

二．填空题：

13. $y=-1$　　14. 90　　15. $4,\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$　　16. $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$

三. 解答题：

17. 解：选择条件① $a_1=\dfrac{3}{2}$，$4S_n+2a_{n+1}=3^{n+1}(n\in\mathrm{N}^*)$.

（Ⅰ）证明：当 $n=1$ 时，$4S_1+2a_2=3^2$，

$\because S_1=a_1=\dfrac{3}{2}$，$\therefore a_2=\dfrac{3}{2}$，$\therefore b_1=a_1+a_2=3$，　　…………2 分

当 $n\ge 1$ 时，$\because 4S_n+2a_{n+1}=3^{n+1}$，①　$\therefore 4S_{n+1}+2a_{n+2}=3^{n+2}$，②

②－①得 $a_{n+2}+a_{n+1}=3^{n+1}$，即 $b_n=a_n+a_{n+1}=3^n(n\ge 1)$，　　…………5 分

$\therefore \{b_n\}$ 是以首项 $b_1=3$ 、公比 $q=3$ 的等比数列；　　…………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，$b_n=3^n(n\in\mathrm{N}^*)$，

$\therefore T_n=1\times 3+2\times 3^2+3\times 3^3+\cdots+n\times 3^n$，③　　…………8 分

③ $\times 3$ 得 $3T_n=1\times 3^2+2\times 3^3+3\times 3^4+\cdots+n\times 3^{n+1}$，④

③－④得 $-2T_n=3+3^2+3^3+\cdots+3^n-n\times 3^{n+1}$，　　…………10 分

$\therefore T_n=\dfrac{3}{4}\times[(2n-1)\times 3^n+1]$.　　…………12 分

17. 选择条件② $a_1=a_2=\dfrac{3}{2}$，$a_{n+2}=a_n+2\times 3^n(n\in\mathrm{N}^*)$.

（Ⅰ）证明：由 $a_{n+2}=a_n+2\times 3^n(n\in\mathrm{N}^*)$ 得 $a_{n+2}+a_{n+1}=a_{n+1}+a_n+2\times 3^n$，　　…………1 分

$\because b_n=a_n+a_{n+1}$，$\therefore b_{n+1}=b_n+2\times 3^n$，$\therefore b_{n+1}-3^{n+1}=b_n-3^n(n\in\mathrm{N}^*)$，　　…………3 分

$\therefore b_n-3^n=b_1-3=a_1+a_2-3=0$，$\therefore b_n=3^n(n\in\mathrm{N}^*)$，　　…………5 分

$\therefore \{b_n\}$ 是以首项 $b_1=3$ 、公比 $q=3$ 的等比数列；　　…………6 分

（Ⅱ）同上.

18．解：（Ⅰ）由表中数据可得老年人、中年人和青年人选择报团游的频率分别为 $p_1=\dfrac{15}{18}=\dfrac{5}{6}$，$p_2=\dfrac{30}{40}=\dfrac{3}{4}$，$p_3=\dfrac{22}{42}=\dfrac{11}{21}$，因为 $p_1>p_2>p_3$，所以老年人更倾向于选择报团游；　　…………4 分

（Ⅱ）由题意得满意度为“不满意”的自助游人群中，老年人有 1 人，记为 a；中年人有 2 人，记为 b，c；青年人有 2 人，记为 d，e.

从中随机选取两人，其基本事件为(a,b)，(a,c)，(a,d)，(a,e)，(b,c)，(b,d)，(b,e)，(c,d)，(c,e)，(d,e)，共 10 个；

其中所求事件“这两人中有老年人”为(a,b)，(a,c)，(a,d)，(a,e)，共 4 个；故这两人中有老年人的概率为$p=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$；　　…………9 分

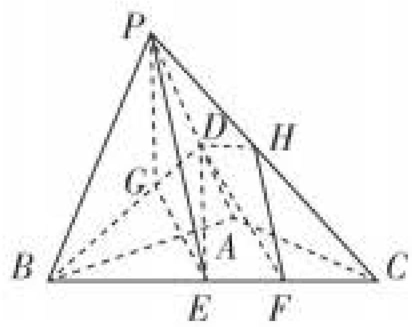
（Ⅲ）由上表可知，报团游的满意率为$p_4=\dfrac{12+18+15}{15+30+22}=\dfrac{45}{67}$，

自助游的满意率为$p_5=\dfrac{1+4+6}{3+10+20}=\dfrac{1}{3}$，因为$p_4>p_5$，故建议他选择报团游．…………12 分

（答案不唯一，言之有理即可给分）

19.（Ⅰ）证明：连结BG，由题意得BG与GD共线，且$BG=2GD$，

$\because E$是BC的中点，$BF=3FC$，$\therefore F$是CE的中点，



$\therefore \dfrac{BG}{GD}=\dfrac{BE}{EF}=2$，$\therefore GE//DF$，$\therefore DF//$平面$PGE$，　……2 分

$\because H$是PC的中点，$\therefore FH//PE$，$\therefore FH//$平面PGE，……4 分

$\because DF\cap FH=F$，$\therefore$平面$DFH//$平面PGE；　…………6 分

（Ⅱ）$\because AB=AC=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$\therefore AB^2+AC^2=8=BC^2$，$\therefore AB\perp AC$，

$\because PB\perp AC$，$AB\cap PB=B$，$\therefore AC\perp$平面PAB，　…………8 分

$\because \Delta PAB$是正三角形，$\therefore S_{\Delta PAB}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\sqrt{3}$，

$\therefore V_{P-DEG}=V_{E-PDG}=\dfrac{1}{3}V_{E-PBD}=\dfrac{1}{6}V_{E-PAB}=\dfrac{1}{12}V_{C-PAB}=\dfrac{1}{12}\times\dfrac{1}{3}S_{\Delta PAB}\cdot AC=\dfrac{\sqrt{3}}{18}$．…………12 分

20（Ⅰ）解：$\because f(-x)=\cos(-x)-x\sin(-x)=\cos x+x\sin x=f(x)$，$x\in R$，

$\therefore f(x)$是R上的偶函数，也是$[-2\pi,2\pi]$上偶函数，　…………1 分

当$x\in[0,2\pi]$时，$f'(x)=x\cos x$，

令$f'(x)\ge 0$，则$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$或$\dfrac{3\pi}{2}\le x\le 2\pi$；令$f'(x)<0$，则$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}$，

$\therefore f(x)$在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$和$[\dfrac{3\pi}{2},2\pi]$上单调递增，在$(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})$上单调递减；　…………3 分

$\because f(x)$是偶函数，$\therefore f(x)$在$[-2\pi,-\dfrac{3\pi}{2}]$和$[-\dfrac{\pi}{2},0]$上单调递减，在$(-\dfrac{3\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2})$上单调递增；

综上所述，$f(x)$在$[-2\pi,-\dfrac{3\pi}{2}]$、$(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})$和$[-\dfrac{\pi}{2},0]$上单调递减，在$(-\dfrac{3\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2})$、$[0,\dfrac{\pi}{2}]$和$[\dfrac{3\pi}{2},2\pi]$上单调递增；　…………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$g(-x)=f(-x)-\dfrac{1}{4}(-x)^2-1=g(x)$，$\therefore g(x)$是$R$上的偶函数　…………5 分

（1）当 $x\in[0,2\pi]$ 时，$g'(x)=x(\cos x-\frac{1}{2})$，

令 $g'(x)>0$，则 $0<x<\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3}<x<2\pi$；令 $g'(x)<0$，则 $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$，

$\therefore g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{3}]$ 和 $[\frac{5\pi}{3},2\pi]$ 上单调递增，在 $(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3})$ 上单调递减； …………7 分

$\because g(\frac{\pi}{3})>g(0)=0$，$g(\frac{5\pi}{3})=\frac{5\pi}{3}\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})-\frac{1}{4}\times(\frac{5\pi}{3})^2-\frac{1}{2}<0$，$g(2\pi)=-\pi^2<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,\frac{5\pi}{3})$ 上有一个零点，$\therefore g(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上有两个零点； …………9 分

（2）当 $x\in(2\pi,+\infty)$ 时，$g(x)=\cos x+x\sin x-\frac{1}{4}x^2-1\le x-\frac{1}{4}x^2<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(2\pi,+\infty)$ 上没有零点； …………11 分

由（1）、（2）及 $g(x)$ 是偶函数可得 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有三个零点. …………12 分

21 解：（Ⅰ）由题意得 ΔPF_1F_2 内切圆半径 r 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$， …………1 分

$$\begin{cases} e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}\times(2a+2c)\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{2}\times 2c\cdot b, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}\therefore\begin{cases} b^2=3, \\ a^2=4, \end{cases}$$ $\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；……4 分

（Ⅱ）设 $P(x_0,y_0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

（1）当 $y_0\ne 0$ 时，设直线 PF_1,PF_2 的方程分别是 $x=m_1y-1$，$x=m_2y+1$，

由 $\begin{cases} x=m_1y-1, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得 $(3m_1^{\ 2}+4)y^2-6m_1y-9=0$，$\therefore y_0y_1=-\frac{9}{3m_1^{\ 2}+4}$， …………6 分

$\because x_0=m_1y_0-1$，$\therefore m_1=\frac{x_0+1}{y_0}$，$\therefore \frac{y_0}{y_1}=-\frac{5+2x_0}{3}$， …………8 分

同理，由 $\begin{cases} x=m_2y+1, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 可得 $\frac{y_0}{y_2}=-\frac{5-2x_0}{3}$，

$\therefore \frac{|PF_1|}{|F_1A|}+\frac{|PF_2|}{|F_2B|}=-\frac{y_0}{y_1}-\frac{y_0}{y_2}=\frac{10}{3}$； …………10 分

（2）当 $y_0=0$ 时，直线 PF_1,PF_2 与 x 轴重合，易得 $\frac{|PF_1|}{|F_1A|}+\frac{|PF_2|}{|F_2B|}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$；

综上所述，$\frac{|PF_1|}{|F_1A|}+\frac{|PF_2|}{|F_2B|}=\frac{10}{3}$. …………12 分

22 解：（Ⅰ）将 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(t+\dfrac{1}{t}), \\ y=t-\dfrac{1}{t} \end{cases}$ 的参数 t 消去得曲线 C_1 的普通方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$，……2 分

$\because \cos(\theta+\dfrac{\pi}{3})=0$，$\therefore \rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta=0$，

由 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ 可得曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y=0$；　　…………5 分

（Ⅱ）由题意得点 $P(3,\sqrt{3})$ 在曲线 C_2 上，其参数方程可表示为 $\begin{cases} x=3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y=\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数），

将上述参数方程代入 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 得 $11t^2+44\sqrt{3}t+4\times 29=0$，

$\therefore t_1+t_2=-4\sqrt{3}$，$t_1t_2=\dfrac{4\times 29}{11}$，　　…………8 分

$\therefore (|PA|-|PB|)^2=(|PA|+|PB|)^2-4|PA||PB|=(t_1+t_2)^2-4t_1t_2=\dfrac{64}{11}$，

$\therefore ||PA|-|PB||=\dfrac{8\sqrt{11}}{11}$.　　…………10 分

23 解：（Ⅰ）当 $m=1$ 时，$f(x)=|x+2|+|x-1|$，

$\because |x+2|+|x-1|\geq |(x+2)-(x-1)|=3$，　　…………3 分

$\therefore$ 当且仅当 $(x+2)(x-1)\leq 0$，即当 $-2\leq x\leq 1$ 时，$f(x)$ 取最小值 3；　　…………5 分

（Ⅱ）由题意得存在 $x\in(0,1)$ 使得 $x+\dfrac{2}{m}+|x-m|\leq 3$，

（1）当 $m\geq 1$ 时，$x+\dfrac{2}{m}+|x-m|\leq 3$ 等价于 $\dfrac{2}{m}+m\leq 3$，$\therefore 1\leq m\leq 2$，　　…………7 分

（2）当 $0<m<1$ 时，

令 $g(x)=x+\dfrac{2}{m}+|x-m|=\begin{cases} \dfrac{2}{m}+m, 0<x<m, \\ 2x+\dfrac{2}{m}-m, m\leq x<1, \end{cases}$ 则 $g(x)_{\min}=\dfrac{2}{m}+m$，

$\therefore \dfrac{2}{m}+m\leq 3$，$\therefore 1\leq m\leq 2$，这与“$0<m<1$”矛盾，此时 m 无解；

综上，实数 m 的取值范围为 $[1,2]$.　　…………10 分