太原市2021年高三年级模拟考试（一）
数学试题（理）参考答案及评分标准

一．选择题：

1. A　2. D　3. B　4. A　5. C　6. C　7. B　8. D　9. A　10. B　11. A　12. D

二．填空题：

13. $y=-x+2$　14. -35　15. $b_n=3^n, \frac{1}{3}-\frac{1}{(2n+1)\times 3^{n+1}}$　16. $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$

三. 解答题：

17. 解：选择条件① $\cos C=\frac{2}{3}$.

（Ⅰ）证明：由 $3c\sin A=4b\sin C$ 和正弦定理得 $3a=4b$， …………2 分

由 $\cos C=\frac{2}{3}$ 和余弦定理得 $\frac{2}{3}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{25b^2-9c^2}{24b^2}$， …………4 分

$\therefore b=c$，$\therefore \Delta ABC$ 为等腰三角形； …………6 分

（Ⅱ）由（1）得 $3a=4b, b=c$，$\because \cos C=\frac{2}{3}$，$\therefore \sin C=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{9}c^2=2\sqrt{5}$，　$\therefore c=b=3, a=4$， …………9 分

$\because BD=2DA$，$\therefore BD=2, DA=1$，

$\therefore CD^2=a^2+BD^2-2a\cdot BD\cos B=a^2+BD^2-2a\cdot BD\cos C=\frac{28}{3}$，

$\therefore CD=\frac{2\sqrt{21}}{3}$. …………12 分

选择条件② $\cos A=\frac{1}{9}$.

（Ⅰ）证明：由 $3c\sin A=4b\sin C$ 和正弦定理得 $3a=4b$， …………2 分

由 $\cos A=\frac{1}{9}$ 和余弦定理得 $\frac{1}{9}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{9c^2-7b^2}{18bc}$， …………4 分

$\therefore b=c$ 或 $b=-\frac{9}{7}c$（舍去），$\therefore \Delta ABC$ 为等腰三角形； …………6 分

（Ⅱ）由（1）得 $3a=4b, b=c$，$\because \cos A=\frac{1}{9}$，$\therefore \sin A=\frac{4\sqrt{5}}{9}$，

$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{9}b^2=2\sqrt{5}$，　$\therefore c=b=3, a=4$， …………9 分

$\because BD=2DA$，$\therefore BD=2, DA=1$，

$\therefore CD^2=b^2+AD^2-2b\cdot AD\cos A=\frac{28}{3}$，$\therefore CD=\frac{2\sqrt{21}}{3}$. …………12 分

18. 解：（Ⅰ）由表中数据可得老年人、中年人和青年人选择报团游的频率分别为

$p_1=\dfrac{15}{18}=\dfrac{5}{6}$，$p_2=\dfrac{30}{40}=\dfrac{3}{4}$，$p_3=\dfrac{22}{42}=\dfrac{11}{21}$，因为 $p_1>p_2>p_3$，所以老年人更倾向于选择报团游；　　…………4 分

（Ⅱ）由题意得 X 所有可能的取值为 $0,1,2$，　　…………5 分

$P(X=0)=\dfrac{C_{13}^3}{C_{15}^3}=\dfrac{22}{35}$，$P(X=1)=\dfrac{C_{13}^2C_2^1}{C_{15}^3}=\dfrac{12}{35}$，$P(X=2)=\dfrac{C_{13}^1C_2^2}{C_{15}^3}=\dfrac{1}{35}$，

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{22}{35}$	$\dfrac{12}{35}$	$\dfrac{1}{35}$

$\therefore EX=0\times\dfrac{22}{35}+1\times\dfrac{12}{35}+2\times\dfrac{1}{35}=\dfrac{2}{5}$；　　…………9 分

（Ⅲ）由上表可知，报团游的满意率为 $p_4=\dfrac{12+18+15}{15+30+22}=\dfrac{45}{67}$，

自助游的满意率为 $p_5=\dfrac{1+4+6}{3+10+20}=\dfrac{1}{3}$，因为 $p_4>p_5$，故建议他选择报团游．…………12 分

（答案不唯一，言之有理即可给分）

19.（Ⅰ）证明：连结 BG，由题意得 BG 与 GD 共线，且 $BG=2GD$，

$\because E$ 是 BC 的中点，$BF=3FC$，$\therefore F$ 是 CE 的中点，

$\therefore \dfrac{BG}{GD}=\dfrac{BE}{EF}=2$，$\therefore GE\,//\,DF$，$\therefore DF\,//$ 平面 PGE，　　…………2 分

$\because H$ 是 PC 的中点，$\therefore FH\,//\,PE$，$\therefore FH\,//$ 平面 PGE，　　…………4 分

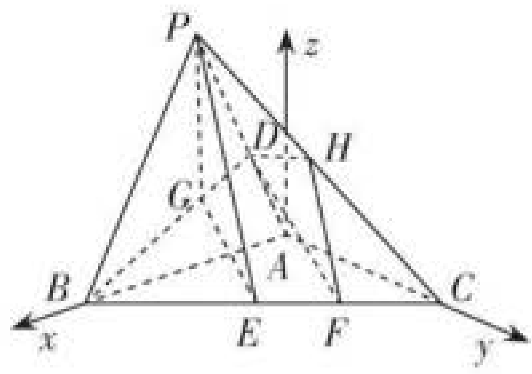
$\because DF\cap FH=F$，$\therefore$ 平面 $DFH\,//$ 平面 PGE；　　…………6 分

（Ⅱ）$\because AB=AC=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$\therefore AB^2+AC^2=8=BC^2$，$\therefore AB\perp AC$，

$\because PB\perp AC$，$AB\cap PB=B$，$\therefore AC\perp$ 平面 PAB，　　…………8 分

以 A 为坐标原点，向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 的方向为 x 轴，y 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，由题意得 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$P(1,0,\sqrt{3})$，

设 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 PAC 的一个法向量，



则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}2y_1=0,\\ x_1+\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$

令 $z_1=-1$，则 $\begin{cases}y_1=0,\\ x_1=\sqrt{3},\end{cases}\therefore\vec{m}=(\sqrt{3},0,-1)$，　……9 分

设 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面 PBC 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}x_2-2y_2+\sqrt{3}z_2=0,\\ 2x_2-2y_2=0,\end{cases}$ 令 $z_2=1$，则 $\begin{cases}x_2=\sqrt{3},\\ y_2=\sqrt{3},\end{cases}\therefore\vec{n}=(\sqrt{3},\sqrt{3},1)$，　……10 分

$\therefore \cos < \vec{m},\vec{n} >= \dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，　　　　　　　　…………11 分

$\therefore$ 二面角 $A-PC-B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.　　　　　　　　…………12 分

20 解：（Ⅰ）由题意得 ΔPF_1F_2 内切圆半径 r 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，　　　　　　　　…………1 分

$\begin{cases} e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\times(2a+2c)\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{2}\times 2c\cdot b, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} b^2=3, \\ a^2=4, \end{cases}$ $\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；……4 分

（Ⅱ）设 $P(x_0,y_0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

（1）当 $y_0\neq 0$ 时，设直线 PF_1,PF_2 的方程分别是 $x=m_1y-1$，$x=m_2y+1$，

由 $\begin{cases} x=m_1y-1, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得 $(3m_1{}^2+4)y^2-6m_1y-9=0$，$\therefore y_0y_1=-\dfrac{9}{3m_1{}^2+4}$，　　…………6 分

$\because x_0=m_1y_0-1$，$\therefore m_1=\dfrac{x_0+1}{y_0}$，$\therefore \dfrac{y_0}{y_1}=-\dfrac{5+2x_0}{3}$，　　　　　　　　…………8 分

同理，由 $\begin{cases} x=m_2y+1, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 可得 $\dfrac{y_0}{y_2}=-\dfrac{5-2x_0}{3}$，

$\therefore \dfrac{|PF_1|}{|F_1A|}+\dfrac{|PF_2|}{|F_2B|}=-\dfrac{y_0}{y_1}-\dfrac{y_0}{y_2}=\dfrac{10}{3}$；　　　　　　　　…………10 分

（2）当 $y_0=0$ 时，直线 PF_1,PF_2 与 x 轴重合，易得 $\dfrac{|PF_1|}{|F_1A|}+\dfrac{|PF_2|}{|F_2B|}=3+\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{3}$；

综上所述，$\dfrac{|PF_1|}{|F_1A|}+\dfrac{|PF_2|}{|F_2B|}=\dfrac{10}{3}$.　　　　　　　　…………12 分

21.（Ⅰ）解：由题意得 $g(x)=e^x+\cos x-2$，$g'(x)=e^x-\sin x$，$x\geq 0$，　　……2 分

$\therefore g''(x)=e^x-\cos x\geq 0$，$\therefore g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值为 $g'(0)=1$；　　　　　　　　…………4 分

（Ⅱ）$\because xf(x)\geq 0$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2},+\infty)$ 上恒成立，且 $f(0)=0$，

$\therefore f'(0)=1-a\geq 0$，$\therefore a\leq 1$，　　　　　　　　…………5 分

（1）当 $x\geq 0$ 时，则 $f(x)\geq 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

令 $h(x)=e^x+\cos x-x-2$，$x\geq 0$，由（1）可知 $h'(x)=e^x-\sin x-1=g'(x)-1\geq 0$，

$\therefore h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore h(x)\geq h(0)=0$，

$\therefore f(x)=e^x+\cos x-ax-2\geq e^x+\cos x-x-2\geq 0$，$\therefore a\leq 1$ 此时符合题意；　…………7 分

（2）当$-\frac{\pi}{2}\le x<0$时，则$f(x)\le 0$在$[-\frac{\pi}{2},0)$上恒成立，

$\because f'(x)=e^x-\sin x-a$，$\therefore f''(x)=e^x-\cos x$，　$f'''(x)=e^x+\sin x$

$\because f'''(x)$在$[-\frac{\pi}{2},0)$上单调递增，且$f'''(-\frac{\pi}{2})=e^{-\frac{\pi}{2}}-1<0$，$f'''(0)=1>0$，

$\therefore \exists x_0\in(-\frac{\pi}{2},0)$，使得$f'''(x_0)=0$，

x	$(-\frac{\pi}{2},x_0)$	x_0	$(x_0,0)$
$f'''(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	↘		↗

…………8 分

又$\because f''(-\frac{\pi}{2})=e^{-\frac{\pi}{2}}>0$，$f''(x_0)<f''(0)=0$，$\therefore \exists x_1\in(-\frac{\pi}{2},x_0)$，使得$f''(x_1)=0$，

x	$(-\frac{\pi}{2},x_1)$	x_1	$(x_1,0)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	↗		↘

…………9 分

又$\because f'(-\frac{\pi}{2})=e^{-\frac{\pi}{2}}+1-a>0$，$f'(0)=1-a\ge 0$，$\therefore f'(x)\ge 0$在$[-\frac{\pi}{2},0)$上恒成立，……10 分

$\therefore f(x)$在$[-\frac{\pi}{2},0)$上单调递增，$\therefore f(x)\le f(0)=0$在$[-\frac{\pi}{2},0)$上恒成立，

$\therefore a\le 1$此时符合题意；　…………11 分

综上所述，实数a的取值范围是$(-\infty,1]$．　…………12 分

22 解：（Ⅰ）将$\begin{cases}x=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t}),\\ y=t-\frac{1}{t}\end{cases}$的参数$t$消去得曲线$C_1$的普通方程为$x^2-\frac{y^2}{4}=1$，　……2 分

$\because \cos(\theta+\frac{\pi}{3})=0$，$\therefore \rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta=0$，

由$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$可得曲线$C_2$的直角坐标方程为$x-\sqrt{3}y=0$；　…………5 分

（Ⅱ）由题意得点$P(3,\sqrt{3})$在曲线C_2上，其参数方程可表示为$\begin{cases}x=3+\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\sqrt{3}+\frac{1}{2}t\end{cases}$（$t$为参数），

将上述参数方程代入 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 得 $11t^2+44\sqrt{3}t+4\times 29=0$，

$\therefore t_1+t_2=-4\sqrt{3}$， $t_1t_2=\frac{4\times 29}{11}$， …………8 分

$\therefore (|PA|-|PB|)^2=(|PA|+|PB|)^2-4|PA||PB|=(t_1+t_2)^2-4t_1t_2=\frac{64}{11}$，

$\therefore ||PA|-|PB||=\frac{8\sqrt{11}}{11}$. …………10 分

23 解：（Ⅰ）当 $m=1$ 时， $f(x)=|x+2|+|x-1|$，

$\because |x+2|+|x-1|\geq |(x+2)-(x-1)|=3$， …………3 分

$\therefore$ 当且仅当 $(x+2)(x-1)\leq 0$，即当 $-2\leq x\leq 1$ 时， $f(x)$ 取最小值 3； …………5 分

（Ⅱ）由题意得存在 $x\in(0,1)$ 使得 $x+\frac{2}{m}+|x-m|\leq 3$，

（1）当 $m\geq 1$ 时， $x+\frac{2}{m}+|x-m|\leq 3$ 等价于 $\frac{2}{m}+m\leq 3$， $\therefore 1\leq m\leq 2$， …………7 分

（2）当 $0<m<1$ 时，

令 $g(x)=x+\frac{2}{m}+|x-m|=\begin{cases}\frac{2}{m}+m, 0<x<m,\\ 2x+\frac{2}{m}-m, m\leq x<1,\end{cases}$ 则 $g(x)_{\min}=\frac{2}{m}+m$，

$\therefore \frac{2}{m}+m\leq 3$， $\therefore 1\leq m\leq 2$，这与“ $0<m<1$ ”矛盾，此时 m 无解；

综上，实数 m 的取值范围为 $[1,2]$. …………10 分

以上各题，其他解法酌情给分.