太原市 2021 年高三年级模拟考试（二）
数学试题（理）参考答案及评分标准

一．选择题： A D C C B B　A D C B C C

二．填空题： 13. $60°$　14. $\dfrac{7}{9}$　15. $2\ln 2$　16. $[\dfrac{9}{4},3)$

三．解答题：

17.（Ⅰ）证明：$\because \dfrac{a_{n+1}}{n(a_{n+2}-a_{n+1})}=\dfrac{a_n}{(n+1)(a_{n+1}-a_n)}+\dfrac{1}{2n(n+1)}$，$\therefore \dfrac{(n+1)a_{n+1}}{a_{n+2}-a_{n+1}}=\dfrac{na_n}{a_{n+1}-a_n}+\dfrac{1}{2}$，

$\therefore b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{2}$，$\therefore b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{2}$是一个与$n$无关的常数，　………4 分

$\therefore \{b_n\}$是以首项$b_1=\dfrac{1}{2}$、公差$d=\dfrac{1}{2}$的等差数列；　………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$b_n=\dfrac{n}{2}(n\in N^*)$，$\therefore \dfrac{na_n}{a_{n+1}-a_n}=\dfrac{n}{2}$，$\therefore a_{n+1}=3a_n$，

$\because a_1=1$，$\therefore a_n=3^{n-1}(n\in N^*)$，$\therefore c_n=\dfrac{b_n}{a_n}=\dfrac{n}{2\times 3^{n-1}}(n\in N^*)$，　………8 分

$\therefore S_n=\dfrac{1}{2}\times(1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{3^2}+\cdots+\dfrac{n}{3^{n-1}})$，　①

①$\times\dfrac{1}{3}$得$\dfrac{1}{3}S_n=\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{3^{n-1}}+\dfrac{n}{3^n})$，　②

①−②得$\dfrac{2}{3}S_n=\dfrac{1}{2}\times(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}}-\dfrac{n}{3^n})$，

$\therefore S_n=\dfrac{1}{8}\times(9-\dfrac{2n+3}{3^{n-1}})$．　………12 分

18 解：（Ⅰ）由频率分布直方图得该样本中垃圾量为$[4,6)$，$[6,8)$，$[8,10)$，$[10,12)$，$[12,14)$，$[14,16)$，$[16,18]$的频率分别为$0.08,0.1,0.2,0.24,0.18,0.12,0.08$，

$\bar{x}=5\times0.08+7\times0.10+9\times0.20+11\times0.24+13\times0.18+15\times0.12+17\times0.08=11.04\approx11$，

所以当天这 50 个社区垃圾量的平均值为11吨；　………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$\mu=11$，$\because \sigma^2=9$，$\therefore \sigma=3$，

$\therefore P(X>14)=P(X>\mu+\sigma)=\dfrac{1-0.6827}{2}=0.15865$，

所以这 200 个社区中“超标”社区的个数为$200\times0.15865\approx32$；　………7 分

（Ⅲ）由（Ⅰ）得样本中当天垃圾量为$[14,16)$的社区有$50\times0.12=6$个，垃圾量为$[16,18)$的社区有$50\times0.08=4$个，所以Y的可能取值为$0,1,2,3$，　………8 分

$P(Y=0)=\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{6}$，$P(Y=1)=\dfrac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{2}$，$P(Y=2)=\dfrac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{10}$，$P(Y=3)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{30}$，

$\therefore Y$的分布列为

Y	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{30}$

$\therefore EY = 0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$.　　　　………12 分

19.（Ⅰ）证明：设点 G,H 分别是 CD,CB 的中点，连结 EG,FH,GH，

则 $GH\parallel DB$，且 $DB=2GH$，$\because EF\parallel DB$，且 $DB=2EF$，$\therefore EF\parallel GH$，且 $EF=GH$，

$\therefore EFHG$ 平行四边形，$\therefore FH\parallel EG$，　　　　………1 分

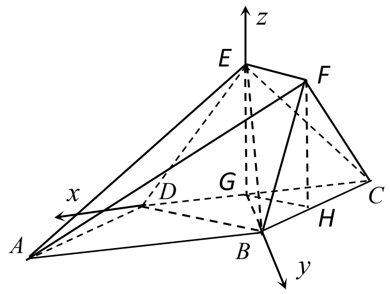
$\because CE=DE$，$\therefore EG\perp CD$，

$\because$ 平面 $CDE\perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore EG\perp$ 平面 $ABCD$，　　　　………3 分

$\therefore FH\perp$ 平面 $ABCD$，$\because FH\subset$ 平面 BCF，

$\therefore$ 平面 $BCF\perp$ 平面 $ABCD$；　　　　………6 分



（Ⅱ）连结 BG，由（Ⅰ）得 $EG\perp$ 平面 $ABCD$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，且 $\angle BAD=60°$，

$\therefore \Delta BCD$ 是边长为 2 的等边三角形，$\therefore BG\perp CD$，$BG=\sqrt{3}$，　　　　………8 分

以 G 为坐标原点，向量 $\overrightarrow{GD},\overrightarrow{GB}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $G-xyz$，由题意得 $G(0,0,0)$，$A(2,\sqrt{3},0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$C(-1,0,0)$，

设 $E(0,0,t)(t>0)$，则 $F(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},t)$，

设 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 AEF 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}\frac{1}{2}x_1-\frac{\sqrt{3}}{2}y_1=0,\\ 2x_1+\sqrt{3}y_1-tz_1=0,\end{cases}$ 令 $y_1=1$，则 $\begin{cases}x_1=\sqrt{3},\\ z_1=\frac{3\sqrt{3}}{t},\end{cases}$ $\therefore \vec{m}=(\sqrt{3},1,\frac{3\sqrt{3}}{t})$，

设 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面 BCF 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}x_2+\sqrt{3}y_2=0,\\ \frac{1}{2}x_2+\frac{\sqrt{3}}{2}y_2-tz_2=0,\end{cases}$ 令 $y_2=-1$，则 $\begin{cases}x_2=\sqrt{3},\\ z_2=0,\end{cases}$ $\therefore \vec{n}=(\sqrt{3},-1,0)$，

$\therefore |\cos<\vec{m},\vec{n}>|=|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}|=\frac{1}{\sqrt{4+\frac{27}{t^2}}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\therefore t=3\sqrt{3}$，　　　　………11 分

$\therefore GE=3\sqrt{3}$，$\therefore$ 直线 BE 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.　　　　………12 分

20 解：（Ⅰ）设 $D(\frac{2}{3},y_0)$，由题意得 $\begin{cases} k_{DA}\cdot k_{DB}=\dfrac{y_0}{\frac{2}{3}+a}\cdot\dfrac{y_0}{\frac{2}{3}-a}=-\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{2}\times 2a\times|y_0|=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}, \\ \dfrac{4}{9a^2}+\dfrac{{y_0}^2}{b^2}=1, \end{cases}$ ………3 分

$\therefore\begin{cases} b^2=1, \\ a^2=4, \end{cases}$ $\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$； ………5 分

（Ⅱ）假设存在这样的点 N，设直线 PM 与 x 轴相交于点 $T\ (x_0,0)$，由题意得 $TP\perp BQ$，

由（Ⅰ）得 $B(2,0)$，设 $P(\frac{2}{3},t)$，$Q(x_1,y_1)$，由题意可设直线 AP 的方程为 $x=my-2$，

由 $\begin{cases} x=my-2, \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $(m^2+4)y^2-4my=0$，$\therefore y_1=\frac{4m}{m^2+4}$ 或 $y_1=0$（舍去），$x_1=\frac{2m^2-8}{m^2+4}$， ……7 分

$\because \frac{2}{3}=mt-2$，$\therefore t=\frac{8}{3m}$，

$\because TP\perp BQ$，$\therefore \overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{BQ}=(\frac{2}{3}-x_0)(x_1-2)+ty_1=0$，

$\therefore x_0=\frac{2}{3}+\frac{ty_1}{x_1-2}=\frac{2}{3}+\frac{8}{3m}\cdot\frac{4m}{m^2+4}\cdot\frac{m^2+4}{-16}=0$， ………10 分

$\therefore$ 直线 PM 过定点 $T\ (0,0)$，

$\therefore$ 存在定点 $N(1,0)$，使得 $|MN|=1$. ………12 分

21.（Ⅰ）解：令 $h(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x^2+1}+x-\sin x-\cos x$，$x\geq-\frac{\pi}{4}$，

（1）当 $-\frac{\pi}{4}\leq x<\frac{\pi}{4}$ 时，则 $h'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1-\cos x+\sin x$，

$\because h''(x)=\frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^{\frac{3}{2}}}+\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})>0$， ………1 分

$\therefore h'(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ 上单调递增，且 $h'(0)=0$，

当 $-\frac{\pi}{4}\leq x<0$ 时，$h'(x)<0$；当 $0\leq x<\frac{\pi}{4}$ 时，$h'(x)\geq 0$，

$\therefore h(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4},0)$ 上递减，在 $[0,\frac{\pi}{4})$ 上递增，$\therefore h(x)\geq h(0)=0$，$\therefore f(x)\geq g(x)$；……3 分

（2）当$x\geq\frac{\pi}{4}$时，则$h(x)=\sqrt{x^2+1}+x-\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\geq\sqrt{x^2+1}+x-\sqrt{2}$

$\geq\sqrt{(\frac{\pi}{4})^2+1}+\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}>1+\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}>0$，$\therefore f(x)\geq g(x)$；

综上所述，当$x\geq-\frac{\pi}{4}$时，$f(x)\geq g(x)$； ………5 分

（Ⅱ）令$t(x)=f(x)+g(x)-ax-2=\sqrt{x^2+1}+x+\sin x+\cos x-ax-2$，$x\geq 0$，

则$t'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1+\cos x-\sin x-a$，

由题意得$t(x)\leq 0$在$[0,+\infty)$上恒成立，$\because t(0)=0$，$\therefore t'(0)=2-a\leq 0$，$\therefore a\geq 2$； ………7 分

下证当$a\geq 2$时，$t(x)\leq 0$在$[0,+\infty)$上成立，

$\because t(x)=\sqrt{x^2+1}+x+\sin x+\cos x-ax-2\leq\sqrt{x^2+1}+x+\sin x+\cos x-2x-2$，

令$\varphi(x)=\sqrt{x^2+1}-x+\sin x+\cos x-2$，只需证明$\varphi(x)\leq 0$在$[0,+\infty)$上成立， ………8 分

（1）当$0\leq x\leq\frac{\pi}{4}$时，$\varphi'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1+\cos x-\sin x$，

$\varphi''(x)=\frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^{\frac{3}{2}}}-\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，$\because\varphi''(x)$在$[0,\frac{\pi}{4}]$上单调递减，$\therefore\varphi''(x)\leq\varphi''(0)=0$，

$\therefore\varphi'(x)$在$[0,\frac{\pi}{4}]$上单调递减，$\therefore\varphi'(x)\leq\varphi'(0)=0$，

$\therefore\varphi(x)$在$[0,\frac{\pi}{4}]$上单调递减，$\therefore\varphi(x)\leq\varphi(0)=0$； ………10 分

（2）当$x>\frac{\pi}{4}$时，$\varphi(x)=\sqrt{x^2+1}-x+\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})-2\leq\sqrt{x^2+1}-x+\sqrt{2}-2$

$\leq\sqrt{(\frac{\pi}{4})^2+1}-\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}-2<0$；

综上所述，实数a的取值范围是$[2,+\infty)$． ………12 分

22 解：（Ⅰ）将$\begin{cases}x=\frac{2\sqrt{2}t}{t^2+1},\\ y=\frac{t^2-1}{t^2+1}\end{cases}$的参数$t$消去得曲线$C$的普通方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1(y\neq 1)$， ……3 分

$\because\rho\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-1=0$，

由$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$可得直线$l$的直角坐标方程为$x-y-1=0$； ………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得曲线C的参数方程可表示为$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）$(\theta\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z)$，

设$A(\sqrt{2}\cos\theta,\sin\theta)$，则点$A$到直线$l$的距离$d=\frac{|\sqrt{2}\cos\theta-\sin\theta-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， ………7 分

$\therefore\sqrt{2}\cos\theta-\sin\theta=0$或$\sqrt{2}\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{3}\cos(\theta+\varphi)=2\ (\tan\varphi=\sqrt{2})$（舍去），

$\because\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\therefore\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，

当$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，$A(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3})$；当$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$时，$A(-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3})$． ………10 分

23 解：（Ⅰ）当$m=1$时，原不等式为$|x+1|+|2x-1|\le 6$，

$\begin{cases}x<-1,\\ -(x+1)-(2x-1)\le 6\end{cases}$或$\begin{cases}-1\le x\le\frac{1}{2},\\ x+1-(2x-1)\le 6\end{cases}$或$\begin{cases}x>\frac{1}{2},\\ x+1+2x-1\le 6,\end{cases}$ ………3 分

$\therefore -2\le x<-1$或$-1\le x\le\frac{1}{2}$或$\frac{1}{2}<x\le 2$

$\therefore$原不等式$f(x)\le 6$的解集为$\{x|-2\le x\le 2\}$； ………5 分

（Ⅱ）由题意得$f(x)=\begin{cases}-3x-m^2+m, x<-m^2,\\ -x+m^2+m, -m^2\le x\le\frac{m}{2},\\ 3x+m^2-m, x>\frac{m}{2},\end{cases}$

$\therefore f(x)_{\min}=f(\frac{m}{2})=m^2+\frac{1}{2}m=\frac{3}{2}$，$\therefore m=1$或$m=-\frac{3}{2}$（舍去）， ………7 分

$\therefore a+b=1$，令$\begin{cases}a=\cos^2\theta,\\ b=\sin^2\theta\end{cases}(0<\theta<\frac{\pi}{2})$，

则$\sqrt{a}+2\sqrt{b}=\cos\theta+2\sin\theta=\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)\le\sqrt{5}$，

当$\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi\ (0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, 且$\tan\varphi=\frac{1}{2})$时，上述不等式取等号． ………10 分

注：以上各题其他解法，请酌情给分．